СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ

МАТЕМАТИКА

Программа, методические указания и задания
контрольной и самостоятельной работы
для студентов второго курса заочной формы обучения
специальностей: 100801.51 *Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров*,
260807.51 *Технология продуктов общественного питания*,
100800.62 «Товароведение», 260800.62 « Технология продукции и организация общественного питания»,
110900.62 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции»

Кафедра высшей математики

Математика: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы для студентов второго курса заочной формы обучения. / Сост. Т.Т. Баланчук,
Г. И. Шегурова. – Новосибирск: СибУПК, 78 с.

Рецензент Т.П.Руднева, канд. физ.-мат. наук, доц.

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики, протокол от 25 ноября 2008 г. № 4.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математика – это наука о количественных соотношениях и пространственных формах реального мира, понимаемых в самом широком смысле. Длительный исторический путь развития науки привел к проникновению математических методов во все сферы научной и практической деятельности человека. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Математика предоставляет мощные средства для решения разнообразных практических задач.

Цель дисциплины «Математика» в системе подготовки современного специалиста – это освоение необходимого математического аппарата, позволяющего моделировать, решать и анализировать прикладные технические, экономические и управленческие задачи, с применением, в случае необходимости, компьютерной техники.

Математика - это универсальный язык науки и часть общей культуры человечества. Поэтому математическое образование является важной составляющей в системе подготовки современного специалиста.

Программа дисциплины «Математика» предусматривает изучение студентами второго курса названных специальностей таких разделов математики как линейная алгебра, теория вероятностей, математическая статистика. Данная работа составлена на основе учебных программ по дисциплине «Математика» для соответствующих специальностей и предназначена для студентов второго курса заочной формы обучения.

Предлагаемая методическая разработка содержит задания контрольной работы, а также методические указания по их выполнению, где сформулированы основные теоретические положения и даны образцы решения задач контрольной работы. Поскольку эти задачи не охватывают весь программный материал, то в разделе «Задания самостоятельной работы студентов» сформулированы самые важные вопросы и приведены типовые задачи по каждой теме, входящей в программу дисциплины. Эти вопросы и задачи студенту рекомендуется использовать при подготовке к экзамену. Ответы на вопросы студент может найти в любом учебнике из «Списка рекомендуемой литературы», а на многие важные вопросы ответы имеются в этой методической работе.

2. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ ПО СРОКАМ ОБУЧЕНИЯ (ЧАС)

Вид занятия	Специальность*				
	080401.65	***260501.65***	***080111.65***	***080401.65***	***260501.65***
	Срок обучения				
	5,5 лет		3,5 года		
	2 курс				
Аудиторные занятия	26	26	18	18	18
-*лекции*	14	14	10	10	10
-*практические*	12	12	8	8	8
Самостоятельная работа	274	224	182	282	232
Общая трудоемкость	300	250	200	300	250
Контрольная работа	+	+	+	+	+
Вид итогового контроля	Экзамен	Экзамен	Экзамен	Экзамен	Экзамен

***Наименование специальностей**:

080111.65 *Маркетинг*
080401.65 *Товароведение и экспертиза товаров (по областям применения)*
260501.65 *Технология продуктов общественного питания*

3. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематический план дисциплины

Заочная форма обучения – 5,5 лет

№ п/п	Наименование тем дисциплины	Специальность*							
		080401.65				***260501.65***			
		количество часов на изучение				количество часов на изучение			
		всего	в том числе			всего	в том числе		
			лекции	практ.	СРС		лекции	практ.	СРС
1	Матрицы и определители	24	2	-	22	24	2	-	22
2	Система линейных алгебраических уравнений	28	-	2	26	22	-	2	20
3	Элементы линейного программирования	-	-	-	-	26	2	-	24
4	Комбинаторика	20	-	-	20	-	-	-	-
5	Основные понятия и теоремы теории вероятностей	34	2	2	30	34	2	2	30
6	Повторение независимых испытаний	14	-	2	12	18	-	2	16
7	Дискретная случайная величина	24	2	2	20	20	2	2	16
8	Непрерывная случайная величина	34	2	-	32	28	2	-	26
9	Системы массового обслуживания	22	2	-	20	-	-	-	-
10	Обработка экспериментальных данных	30	2	2	26	24	2	2	20
11	Проверка статистических гипотез	20	-	-	20	20	-	-	20
12	Теория корреляции	50	2	2	46	34	2	2	30
	Всего	300	14	12	274	250	14	12	224

Заочная форма обучения – 3,5 года

№ п/п	Наименование темы дисциплины	Специальность*											
		080111.65				***080401.65***				***260501.65***			
		количество часов на изучение				количество часов на изучение				количество часов на изучение			
		всего	в том числе			всего	в том числе			всего	в том числе		
			лекции	практ.	СРС		лекции	практ.	СРС		лекции	практ.	СРС
1	Матрицы и определители	14	2	-	12	16	2	-	14	24	2	-	22
2	Системы линейных уравнений	18	-	2	16	28	-	2	26	24	-	2	22
3	Элементы линейного программирования	-	-	-	-	-	-	-	-	26	2	-	24
4	Комбинаторика	12	-	-	12	20	-	-	20	-	-	-	-
5	Основные понятия и теоремы теории вероятностей	30	2	2	26	34	2	2	30	34	2	2	30
6	Повторение независимых испытаний	12	-	2	10	14	-	2	12	18	-	2	16
7	Дискретная случайная величина	18	2	-	16	24	2	-	22	20	2	-	18
8	Непрерывная случайная величина	20	-	-	20	34	-	-	34	28	-	-	28
9	Системы массового обслуживания	22	2	-	20	22	2	-	20	-	-	-	
10	Обработка экспериментальных данных	24	-	2	22	30	-	2	28	22	-	2	20
11	Проверка статистических гипотез	10	-	-	10	28	-	-	28	20	-	-	20
12	Теория корреляции	20	2	-	18	50	2	-	48	34	2	-	32
	Всего	200	10	8	182	300	10	8	282	250	10	8	232

3.2. Разделы дисциплины

1. Линейная алгебра.
2. Теория вероятностей.
3. Случайные величины.
4. Математическая статистика.

3.3 Темы и краткое содержание

Раздел 1. Линейная алгебра

Тема 1. Матрицы и определители

Матрицы, действия над ними. Определители, их свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Виды СЛАУ и методы их решения: правило Крамера, матричный метод, метод Гаусса исключения переменных. Базисные и свободные переменные. Общее, частные и базисные решения СЛАУ. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

Тема 3. Элементы линейного программирования
(только для специальности 260501.65)

Математическая модель задачи линейного программирования. Допустимое и оптимальное решение задачи. Графический метод решения задачи линейного программирования.

Раздел 2. Теория вероятностей

Тема 4. Комбинаторика

Комбинации элементов множеств, правила сложения и умножения. Виды комбинаций для элементов одного множества: перестановки, размещения и сочетания с повтором и без повтора элементов.

Тема 5. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Испытание, событие, виды событий. Случайные события. Полная система элементарных исходов. Классическое и статистическое определения вероятности. Частота и вероятность. Зависимые и независимые события, условная вероятность.

Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Тема 6. Повторение независимых испытаний

Формула Бернулли. Локальная и интегральная формулы Лапласа. Наивероятнейшее число наступлений события.

Раздел 3. Случайные величины

Тема 7. Дискретная случайная величина (ДСВ)

Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Основные числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их смысл, свойства и вычисление.

Тема 8. Непрерывная случайная величина (НСВ)

Дифференциальная и интегральная функции распределения непрерывной случайной величины, их вероятностный смысл, свойства и графики. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Вероятность попадания НСВ в заданный промежуток.

Равномерный и показательный законы распределения НСВ, их основные характеристики.

Нормальный закон распределения. Особенности нормального закона распределения непрерывной случайной величины, его основные характеристики. Кривая Гаусса. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток и вероятность её заданного отклонения. Правило трёх сигм.

Понятие о законе больших чисел.

Тема 9. Системы массового обслуживания (СМО)
(только для специальностей 080111.65 и 080401.65)

Основные понятия теории СМО. Марковский случайный процесс. Потоки событий. СМО с отказами. СМО с неограниченным ожиданием. СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди. Исследование эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в СМО.

Раздел 4. Математическая статистика

Тема 10. Обработка экспериментальных данных

Генеральная совокупность и выборка. Сущность выборочного метода. Статистическое распределение выборки, его графическое изображение в виде полигона и гистограммы. Основные характеристики выборочного распределения: средняя, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Точечные и интервальные оценки выборочных характеристик.

Вариационные ряды (только для спец. 080401.65)

Понятие вариационного ряда, способы его задания. Эмпирическая функция распределения. Средние величины. Показатели вариации.

Тема 11. Проверка статистических гипотез

Статистические гипотезы. Выбор вида гипотезы. Критерий согласия Пирсона. Оценка параметров распределения. Вычисление теоретических частот для нормального распределения случайной величины, их сравнение с эмпирическими частотами по критерию Пирсона.

Дисперсионный анализ (только для спец. 080401.65)

Однофакторный дисперсионный анализ: межгрупповая, внутригрупповая и общая дисперсии. Понятие о двухфакторном дисперсионном анализе. Проверка статистических гипотез о существенности влияния различных факторов на результаты эксперимента.

Тема 12. Теория корреляции

Виды зависимостей между случайными величинами. Задачи теории корреляции. Корреляционная таблица. Уравнение регрессии. Метод наименьших квадратов для нахождения параметров уравнения линейной регрессии. Оценка тесноты линейной связи по коэффициенту линейной корреляции. Корреляционное отношение и индекс корреляции. Ранговая корреляция.

Регрессионный анализ (только для спец. 080401.65)

Линейная регрессия. Понятие о криволинейной регрессии. Оценки ошибок регрессий. Множественная регрессия. Мультиколлинеарность.

Временные ряды (только для спец. 080401.65)

Временные ряды, их составляющие. Стационарные временные ряды и их характеристики. Методы сглаживания временных рядов: метод наименьших квадратов и метод скользящих средних. Применение временных рядов для прогнозирования. Авторегрессионная модель.

4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Согласно учебному плану студенты заочной формы обучения на втором курсе выполняют одну контрольную работу, которая предусматривает выполнение девяти заданий. В методических указаниях даны образцы решения типовых задач, аналогичных задачам, предлагаемым студенту в контрольной работе. Особое внимание обращено на основные трудности и типичные ошибки, которые допускаются студентами-заочниками при выполнении работы.

Контрольная работа должна быть выполнена в межсессионный период и представлена на проверку в методкабинет.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы по математике нужно придерживаться следующих правил.

1. Выполнять контрольную работу в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради разборчиво написать фамилию, инициалы, учебный шифр, название дисциплины. В конце работы указать использованную литературу, дату выполнения и расписаться.
3. Работа обязательно должна содержать **все** задачи именно Вашего варианта.
4. Решения задач нужно располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.
6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
7. После получения проверенной работы следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Внимание! **Распечатки на компьютере на проверку не принимаются.**

Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

После правильного выполнения всех заданий контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого выставляется оценка: **«зачтено»** или **«не зачтено».** Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период во время субботних консультаций или во время сессии.

Если контрольная работа имеет оценку «не зачтено», то студент к экзамену не допускается.

Студент обязан выполнить и защитить контрольную работу до сдачи экзамена.

ПРАВИЛО ВЫБОРА ЗАДАНИЙ

Номера задач контрольной работы определяются с помощью приведенной ниже таблицы по двум последним цифрам номера личного дела (шифра) студента.

В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся последней в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо выбрать цифру, являющуюся предпоследней в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий Вы найдете номера задач своей контрольной работы.

Например, если шифр Т-102-58Д, то контрольная работа должна включать задачи 5, 19, 25, 39, 46, 58, 61, 74, 88.

Будьте внимательны при выборе варианта. Работа, выполненная не по своему варианту, возвращается без проверки.

По всем вопросам, связанным с изучением математики, студент может обратиться на кафедру «Высшая математика», по адресу: 630087, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 26. СибУПК, корп.4, каб. 19, тел. кафедры 346-06-22.

ТАБЛИЦА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

		Последняя цифра шифра									
Предпоследняя цифра шифра		***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
	0	3	2	1	4	5	7	9	10	6	8
		13	17	15	16	14	12	18	11	20	19
		27	29	30	21	22	24	25	26	28	23
		31	33	32	34	35	36	39	37	40	38
		46	45	47	48	50	49	41	42	43	44
		51	56	57	54	55	53	60	52	58	59
		70	62	69	67	66	64	68	66	65	61
		77	71	75	73	72	80	74	76	79	78
		83	87	81	84	90	88	85	82	89	86
	1	8	7	10	5	4	6	2	1	9	3
		18	19	17	20	12	14	13	15	11	16
		22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
		38	31	32	33	34	35	36	37	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	43	44
		58	56	57	60	52	59	53	55	51	54
		65	69	66	61	63	62	68	64	67	70
		76	80	75	71	73	79	72	78	77	74
		81	86	87	84	88	83	90	82	85	89
	2	7	6	9	10	3	2	1	8	5	4
		17	18	19	16	20	11	12	14	13	15
		23	24	25	26	27	28	29	30	22	21
		37	38	31	32	33	34	35	36	40	39
		49	50	48	47	41	42	43	44	45	46
		54	55	58	56	60	52	59	53	51	57
		62	69	66	65	64	63	68	70	61	67
		76	71	77	75	78	80	72	74	73	79
		88	86	89	90	87	85	84	83	82	81

		Последняя цифра шифра									
Предпоследняя цифра шифра		***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
	3 или 6	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
		16	15	14	13	12	20	18	19	17	11
		24	26	27	28	29	30	21	22	23	25
		36	37	40	31	32	33	34	35	39	38
		49	50	41	42	43	44	45	46	47	48
		54	60	57	55	53	58	52	59	56	51
		64	70	63	67	65	62	66	68	61	69
		77	75	78	74	79	73	76	72	80	71
		84	83	87	82	88	85	90	86	89	81
	4 или 7	5	4	3	2	1	10	7	9	8	6
		15	14	13	12	11	16	20	19	18	17
		25	27	28	30	29	21	22	23	24	26
		40	32	33	34	35	36	37	31	38	39
		48	47	50	49	44	45	46	41	43	42
		51	55	60	52	59	57	53	58	56	54
		62	65	68	64	70	67	66	69	63	61
		71	72	76	73	79	75	78	80	74	77
		85	90	86	81	83	84	87	88	82	89
	5 или 8 или 9	4	3	2	1	8	9	10	6	5	7
		14	15	13	12	17	16	11	20	19	18
		26	28	29	30	21	22	23	24	25	27
		32	31	34	35	36	37	38	33	39	40
		47	48	49	50	42	43	44	45	46	41
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		65	63	64	67	69	66	62	68	61	70
		75	73	71	72	79	80	78	77	74	76
		86	89	82	87	90	85	84	83	88	81

5. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Линейная алгебра

Матрицы и определители

***Задачи* 1–10**

Найти матрицу, обратную данной матрице, и сделать проверку.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \\ -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -4 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -5 & -3 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Методические указания к решению задач 1 – 10

Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер **2×4** (две строки и четыре столбца).

В общем виде матрицу размера $\boldsymbol{m \times n}$ записывают так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа $\boldsymbol{a_{ij}}$ (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n), входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. Индекс i указывает номер строки, в которой находится элемент, а j – номер столбца.

Часто матрицы записывают сокращенно:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) \text{ или } B = (b_{ij}),$$

где $\boldsymbol{a_{ij}}$ и $\boldsymbol{b_{ij}}$ – элементы соответствующих матриц.

Матрица-строка – это матрица, состоящая из одной строки.

Матрица-столбец – это матрица, состоящая из одного столбца.

Матрица, в которой число строк равно числу столбцов (m=n), называется ***квадратной***, число ее строк (столбцов) называется ***порядком*** квадратной матрицы.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ***главную диагональ матрицы***. Она идет из левого верхнего угла этой матрицы в ее правый нижний угол.

Единичной матрицей E называют квадратную матрицу, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а остальные элементы нули. Например, единичная матрица третьего порядка имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T называется ***транспонированной*** по отношению к матрице A, если столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T с теми же номерами. Например, для матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, транспонированной будет матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Две матрицы называются ***равными***, если совпадают их размеры, а элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц, одинаковы.

Матрицу можно умножать на число, при этом каждый элемент матрицы умножается на это число. Матрицы одного размера можно также складывать и вычитать, при этом складывают или вычитают их соответственные элементы. Эти действия над матрицами называются ***линейными***.

Умножение матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ определяется только при условии, что число столбцов матрицы ***A*** равно числу строк матрицы ***B***.

Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C_{m\times p} = \left(c_{ik}\right)$, элементы которой находятся по следующему правилу: для того, чтобы получить элемент c_{ik} матрицы ***C***, стоящий на пересечении ее i-ой строки и k-го столбца, нужно каждый элемент i-ой строки матрицы ***A*** умножить на соответствующий элемент k-го столбца матрицы ***B*** и все полученные произведения сложить:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Пример 1. Найти произведение матриц ***A*** и ***B***, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица ***A*** имеет размер **2×3,** а матрица ***B*** размером **3×3**. Эти матрицы можно умножать, так как количество столбцов матрицы ***A*** равно количеству строк матрицы ***B*** (их 3). В результате умножения получим матрицу ***C*** размер которой **2×3** (строк как у ***A***, столбцов как у ***B***).

Тогда, умножая элементы каждой строки матрицы ***A*** на соответственные элементы каждого столбца матрицы ***B***, получим:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & -6\\ 1 & 7 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot3+5\cdot1+1\cdot0 & 4\cdot1+5\cdot7+1\cdot2 & 4\cdot(-6)+5\cdot(-2)+1\cdot1\\ (-1)\cdot3+0\cdot1+2\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot7+2\cdot2 & (-1)\cdot(-6)+0\cdot(-2)+2\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17 & 41 & -33\\ -3 & 3 & 8\end{pmatrix}=C.$$

Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ справедливо равенство

$$E\cdot A=A\cdot E=A,$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица того же размера, что и матрица $\boldsymbol{A}$.

Определители

Для квадратных матриц вводится важнейшая числовая характеристика, которую называют ***определителем*** (детерминантом) и обозначают одним из символов: Δ, det$A$, $|A|$.

Рассмотрим сначала квадратную матрицу второго порядка. Ее определителем называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Например: $\begin{vmatrix}-5 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}=(-5)\cdot3-(-2)\cdot4=-15+8=-7.$

Рассмотрим теперь определитель третьего порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Вычисление этого определителя может быть сведено к вычислению определителей второго порядка. Для этого введем понятия миноров и алгебраических дополнений.

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием $\boldsymbol{i}$-ой строки и $\boldsymbol{j}$-го столбца.

Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A_{ij}}$ элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ называется минор $\boldsymbol{M_{ij}}$, взятый со знаком «+», если сумма $(i+j)$ – четное число, и со знаком «–», если сумма $(i+j)$ – нечетное число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{если} \quad (i+j) \quad \text{четное} \\ -M_{ij}, & \text{если} \quad (i+j) \quad \text{нечетное} \end{cases}$$

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}.$$

Пример 2: Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Определитель Δ найдем, используя элементы первой строки этого определителя и их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Вычислим A_{11} – алгебраическое дополнение элемента a_{11}, то есть элемента, который находится в первой строке (i=1) и в первом столбце (j=1). Сумма $i+j$ = 1+1 = 2 есть четное число, следовательно, $A_{11} = M_{11}$. Далее, найдем M_{11}. Для этого в определителе Δ вычеркнем первую строку, так как i=1, и первый столбец, так как j=1. Оставшиеся, невычеркнутые, элементы запишем в виде определителя второго порядка. Получим

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 0 \cdot (-2) = 5.$$

Найдем A_{12} – алгебраическое дополнение элемента a_{12}. Здесь i=1, j=2. Сумма $i+j$ = 1+2 = 3 есть нечетное число, значит $A_{12} = -M_{12}$. Для нахождения M_{12} вычеркнем в определителе Δ

первую строку и второй столбец. Из оставшихся чисел составим определитель второго порядка, таким образом,

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)) = -26.$$

Аналогично, находим:

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$$

Следовательно,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-26) + 1 \cdot (-3) = 64\ .$$

Замечание. Вычисление определителя произвольного порядка n сводится к вычислению определителей (n-1)-го порядка, а те, в свою очередь, сводятся к вычислению определителей (n-2)-го порядка, и так далее до получения определителей второго порядка, которые вычисляются по указанному выше правилу.

Обратная матрица

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю. Только для квадратной невырожденной матрицы A вводится понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной невырожденной матрицы A, если

$$\boldsymbol{AA^{-1} = A^{-1}A = E},$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Обратную матрицу A^{-1} можно найти, используя алгебраические дополнения:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения, соответствующие элементам строк данной матрицы A, располагаются в столбцах с теми же номерами, что и строки.

Задача. Найти матрицу, обратную для матрицы A, и сделать проверку:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -4 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы (см. Пример 2):

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=12-1=11$$

$$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-(-3-2)=5$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+8=9$$

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-(-15+2)=13$$

$$A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-9+4=-5$$

$$A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-10)=7$$

$$A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}5 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=5-8=-3$$

$$A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(3+2)=-5$$

$$A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-12-5=-17.$$

Используя полученные результаты, составим матрицу алгебраических дополнений:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 9 \\ 13 & -5 & 7 \\ -3 & -5 & -17 \end{pmatrix}.$$

Возьмём элементы первой строки данной матрицы А и первой строки найденной матрицы алгебраических дополнений и с их помощью вычислим определитель Δ, используя его разложение по элементам первой строки:

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ = 3· 11 + 5·5 + (–2)·9 = 33 + 25 – 18 = 40.

Для контроля можно вычислить определитель Δ аналогично разложением по элементам второй и третьей строк:

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ = 1·13 + (–4)·(–5) + 1·7 = 13 +20 +7= 40.

$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ = 2·(–3) + 1·(–5) + (–3)·(–17) = 40.

Отметим, что должен получиться тот же результат.

Так как определитель Δ = 40 отличен от нуля, то обратная матрица существует. Запишем её, не забыв ***транспонировать*** матрицу алгебраических дополнений (A_{ij}):

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 11 & 13 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \\ 9 & 7 & -17 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Для проверки воспользуемся определением обратной матрицы, согласно которому $\boldsymbol{A^{-1}A = E}$.

Умножение матриц производим, как указано в Примере 1.

$$A^{-1}A = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 11 & 13 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \\ 9 & 7 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 33+13-6 & 55-52-3 & -22+13+9 \\ 15-5-10 & 25+20-5 & -10-5+15 \\ 27+7-34 & 45-28-17 & -18+7+51 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}40 & 0 & 0\\ 0 & 40 & 0\\ 0 & 0 & 40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

что и требовалось показать.

Ответ.

$$A^{-1}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}11 & 13 & -3\\ 5 & -5 & -5\\ 9 & 7 & -17\end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Задачи 11-20

Пользуясь методом Гаусса, найти общее решение системы линейных уравнений, а также два частных её решения, одно из которых базисное.

11. $\begin{cases}3x_1-x_2-3x_3=-1\\ -15x_1+6x_2+11x_3=2\\ -15x_1+35x_3=20\\ 9x_1-8x_2+11x_3=12\end{cases}$

12. $\begin{cases}-4x_1+5x_2+2x_3=3\\ 12x_1-13x_2-5x_3=-6\\ 20x_1-31x_2-13x_3=-24\\ -16x_1+10x_2+3x_3=-3\end{cases}$

13. $\begin{cases}-4x_1-3x_2-3x_3=-10\\ -8x_1-8x_2-8x_3=-24\\ 4x_1-x_2-x_3=2\\ 8x_1+8x_2+8x_3=24\end{cases}$

14. $\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3=8\\ 20x_1+7x_2+8x_3=35\\ -20x_1-25x_2-20x_3=-65\\ -4x_1+13x_2+8x_3=17\end{cases}$

15. $\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3=9\\ 5x_1+x_2-3x_3=3\\ 15x_1+7x_2-x_3=21\\ -15x_1-15x_2-15x_3=-45\end{cases}$

16. $\begin{cases}4x_1-3x_2+3x_3=4\\ 20x_1-14x_2+11x_3=17\\ 4x_1+2x_2-17x_3=-11\\ 8x_1-5x_2+2x_3=5\end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ -20x_1 - 25x_2 + x_3 = -44 \\ -5x_1 + 15x_2 - 21x_3 = -11 \\ -25x_1 - 20x_2 - 10x_3 = -55 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -12 \\ 15x_1 + 16x_2 + 9x_3 = 40 \\ -20x_1 - 23x_2 - 17x_3 = -60 \\ 25x_1 + 29x_2 + 22x_3 = 76 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \\ -6x_1 + 8x_2 - x_3 = 1 \\ -6x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 21 \\ 4x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ -4x_1 - 11x_2 + x_3 = -14 \\ 10x_1 + 27x_2 - x_3 = 36 \\ -8x_1 - 25x_2 + 11x_3 = -22 \end{cases}$

Методические указания к решению задач 11 – 20

Основные понятия СЛАУ

Системой линейных алгебраических уравнений (*СЛАУ*) называется совокупность линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ***неизвестные переменные***; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – заданные числа, которые называют ***коэффициентами системы***; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – также заданные числа, которые называют ***свободными членами системы***. Размер этой системы $\boldsymbol{m \times n}$,то есть $\boldsymbol{m}$ уравнений и $\boldsymbol{n}$ неизвестных.

Решением системы называется любая совокупность значений неизвестных $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots,$ $x_n = \alpha_n$, после подстановки которых в систему, все ее уравнения обращаются в очевидные равенства.

Решить систему уравнений – это значит найти все ее решения.

При решении системы линейных уравнений, может быть получено только три случая.

1. Система уравнений имеет единственное решение, в этом случае она называется ***совместной определенной***.

2. Система уравнений имеет бесконечное множество решений, тогда она называется ***совместной неопределенной***.

3. Система уравнений не имеет решений и называется ***несовместной***.

Методы решения СЛАУ

Для решения СЛАУ используются следующие методы:

1) правило Крамера;
2) матричный метод;
3) метод Гаусса исключения переменных.

Первые два метода применяются только для решения совместных определённых СЛАУ, а последний метод является универсальным, то есть применяется для решения любых СЛАУ.

1). Согласно правилу Крамера, единственное решение СЛАУ можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

где Δ – главный определитель системы, который должен быть отличным от нуля. Он вычисляется для матрицы *A*, составленной из коэффициентов системы; Δ_i – вспомогательные определители системы, получающиеся из главного определителя Δ путем замены *i*-го столбца коэффициентов на столбец из свободных членов.

2). Матричный метод решения СЛАУ основан на использовании обратной матрицы, при этом решение системы находят по формуле:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B},$$

где ***X***- матрица- столбец из неизвестных системы; $\boldsymbol{A}^{-1}$ – матрица, обратная для матрицы ***A***, составленной из коэффициентов системы; ***B*** – матрица- столбец свободных членов системы. В этом случае Δ - определитель матрицы ***A***, также должен быть отличен от нуля, так как только в этом случае существует обратная матрица.

3). Метод исключения Гаусса основан на равносильных преобразованиях СЛАУ.

Эквивалентными (***равносильными***) называются СЛАУ, имеющие одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования – это преобразования, сохраняющие равносильность СЛАУ. К ним относятся следующие преобразования:

- перестановка уравнений местами;
- вычеркивание одного из двух одинаковых уравнений;
- умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответственных частей другого уравнения этой системы, которые предварительно можно умножить на любое число.

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований, *СЛАУ* приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой затем последовательно, начиная с последнего уравнения, находятся все переменные.

Метод состоит из выполнения ряда однотипных шагов, на каждом из которых производится исключение одного неизвестного. Для этого на каждом шаге выбирается ***ведущее неизвестное*** и ***ведущее уравнение***.

На первом шаге в качестве *ведущего неизвестного* можно выбрать любое неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля. (Удобно, чтобы этот коэффициент был равен единице.) Уравнение с выбранным ведущим неизвестным называется *ведущим уравнением*, **оно помещается на первое место системы**.

Исключим теперь первое ведущее неизвестное с помощью ведущего уравнения из всех уравнений системы, кроме первого (ведущего) уравнения, используя последнее элементарное преобразование.

Первое (ведущее) уравнение при дальнейших шагах метода Гаусса оставляем неизменным, выделяя каким-либо образом ведущее переменное (например, обводя его кружком или подчеркивая).

В качестве *второго ведущего неизвестного* снова можно выбрать любое неизвестное с отличным от нуля коэффициентом **среди оставшихся уравнений**. После такого выбора поместим новое ведущее уравнение на второе место системы и с его помощью исключим второе ведущее неизвестное из всех ниже стоящих уравнений и т. д.

Если в ходе решения не будут выявлены противоречивые уравнения, то на последнем шаге останется лишь одно уравнение, содержащее одну или несколько переменных. Выберем в этом уравнении ведущую переменную (любую, если переменных несколько).

На этом ***прямой ход*** метода Гаусса завершается.

Выделенные в процессе решения ведущие переменные называются ***базисными***. Остальные переменные (если они имеются) называются ***свободными***.

Общим решением *СЛАУ* называется такая её запись, когда все ***базисные*** переменные выражены через ***свободные*** переменные.

Обратный ход метода Гаусса начинается с последнего уравнения системы, из которого выражаем отмеченную ведущую (то есть базисную) переменную. Затем выражаем следующую базисную переменную из предпоследнего уравнения, учитывая результат, полученный из последнего уравнения системы. Далее, для каждого из выше стоящих уравнений системы, указанная процедура повторяется. Обратный ход метода Гаусса заканчивается, когда из первого уравнения системы будет выражена последняя базисная переменная.

В результате будет найдено **общее** (или единственное) решение системы.

Замечание.

Если на любом шаге процесса появляется нулевая строка вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, то она удаляется (вычеркивается) из системы.

Появление уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, при $b \neq 0$ приводит к противоречию, из которого следует заключение о ***несовместности*** исходной системы уравнений, тогда на этом решение заканчивается с ответом: система не имеет решений.

Задача. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Найти общее решение системы и два её частных решения, одно из которых базисное:

$$\begin{cases} \underline{5x_1}-2x_2+x_3=4 \\ 15x_1-3x_2+8x_3=20 \\ 25x_1-x_2+20x_3=44 \\ 15x_1-21x_2-22x_3=-28 \end{cases}$$

Решение. Заметив, что все коэффициенты при неизвестной x_1 пропорциональны, примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее неизвестное x_1 (в уравнении эта переменная подчеркнута). С помощью ведущего уравнения исключим x_1 из остальных уравнений системы путем **прибавления** к ним ведущего уравнения, предварительно умноженного соответственно на -3, -5 и - 3.

$$\left\{\begin{array}{llll} \underline{5x_1}-2x_2+x_3=4 & -3 & -5 & -3 \\ 15x_1-3x_2+8x_3=20 \leftarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 25x_1-x_2+20x_3=44 \leftarrow & & \leftarrow\downarrow & \downarrow \\ 15x_1-21x_2-22x_3=-28 \leftarrow & & \leftarrow & \downarrow \end{array}\right.$$

Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \underline{5x_1}-2x_2+x_3=4 \\ 3x_2+5x_3=8 \\ 9x_2+15x_3=24 \\ -15x_2-25x_3=-40 \end{cases}$$

Последние два уравнения системы можно упростить, разделив обе их части соответственно на 3 и на -5, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \underline{5x_1}-2x_2+x_3=4 \\ 3x_2+5x_3=8 \\ 3x_2+5x_3=8 \\ 3x_2+5x_3=8 \end{cases}$$

Поскольку три последних уравнения одинаковы, то оставим лишь одно из них, вычеркнув два последних уравнения:

$$\begin{cases} \underline{5x_1} - 2x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad \underline{3x_2} + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

На следующем шаге выберем в качестве ведущего второе уравнение, а за ведущую переменную возьмём $\boldsymbol{x_2}$ и подчеркнём её.

На этом прямой ход метода Гаусса закончен.

Обратным ходом найдём выражения для базисных (подчёркнутых) переменных. Из последнего (второго) уравнения получим:

$$3x_2 = 8 - 5x_3 \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 .$$

Из первого уравнения выразим ведущее неизвестное x_1:

$$5x_1 = 4 + 2x_2 - x_3 \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{3}x_3 .$$

Подставим в последнее равенство найденное выше выражение для x_2, тогда $x_1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3\right) - \frac{1}{5}x_3 = \frac{4}{5} + \frac{16}{15} - \frac{10}{15}x_3 - \frac{1}{5}x_3 =$

$$= \frac{12}{15} + \frac{16}{15} - \frac{10}{15}x_3 - \frac{3}{15}x_3 = \frac{28}{15} - \frac{13}{15}x_3.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид:

$$x_1 = \frac{28}{15} - \frac{13}{15}x_3; \qquad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 .$$

где x_1, x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная.

Частные решения получают из общего, если задавать произвольно значение свободной переменной. Например, если взять $x_3 = 1$, то $x_1 = 1$, $x_3 = 1$ – это частное решение системы.

Базисным решением *СЛАУ* называют такое частное решение, при котором свободные переменные равны нулю. В нашем случае, если $x_3 = 0$, то $x_1 = 28/15$, $x_2 = 8/3$ – это частное базисное решение СЛАУ.

Очевидно, что СЛАУ имеет бесчисленное множество частных решений.

Ответ. Общее решение системы: $x_1 = \frac{28}{15} - \frac{13}{15}x_3; \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 .$

(1; 1; 1) – частное решение системы;

(28/15; 8/3; 0) – базисное частное решение системы.

Теория вероятностей

Основные понятия и теоремы теории вероятностей

***Задачи* 21-30**

В партии, состоящей из $\boldsymbol{n}$ одинаково упакованных изделий, смешаны изделия двух сортов, причем $\boldsymbol{k}$ из этих изделий – первого сорта, а остальные изделия – второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся:

а) одного сорта;

б) разных сортов.

21. $\boldsymbol{n} = 30$, $\boldsymbol{k} = 18$;	**26.** $\boldsymbol{n} = 45$, $\boldsymbol{k} = 15$;
22. $\boldsymbol{n} = 25$, $\boldsymbol{k} = 10$;	**27.** $\boldsymbol{n} = 51$, $\boldsymbol{k} = 32$;
23. $\boldsymbol{n} = 31$, $\boldsymbol{k} = 14$;	**28.** $\boldsymbol{n} = 56$, $\boldsymbol{k} = 30$;
24. $\boldsymbol{n} = 50$, $\boldsymbol{k} = 22$;	**29.** $\boldsymbol{n} = 36$, $\boldsymbol{k} = 16$;
25. $\boldsymbol{n} = 40$, $\boldsymbol{k} = 25$;	**30.** $\boldsymbol{n} = 26$, $\boldsymbol{k} = 11$.

Методические указания к решению задач 21 – 30

Основные понятия теории вероятностей

Испытание **–** это изначальное понятие**,** разъясняется как действие, наблюдение, опыт и т.п.

Событие – это результат испытания.

Пример 1. Некто подбросил монету, которая упала гербом вверх. Здесь испытание – подбрасывание монеты, а результат этого испытания – выпадение герба (это событие).

Пример 2. В результате подбрасывания игрального кубика выпало три очка на верхней грани. В этом случае, испытание – подбрасывание кубика, а выпадение трех очков – событие.

Заметим, что монета в примере 1 могла упасть не гербом, а решкой (цифрой вверх). Аналогично, в примере 2, подбрасывание кубика могло бы закончиться выпадением, например, двух или пяти очков.

Событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти, называется ***случайным***.

Пусть в результате испытания могут появиться несколько случайных событий. События называются ***несовместными,*** если появление одного из них исключает появление других.

Пример 3. Рассмотрим такое испытание, как сдача экзамена по математике одним из студентов. В результате этого испытания могут произойти, например, следующие события:

А – экзамен сдан на оценку «4»,

В – экзамен сдан на оценку «3»,

С – экзамен сдан на оценку выше, чем «3» и др.

В этом случае, события А и В несовместны, так как получение оценки «3» делает невозможным получение оценки «4» за этот же экзамен. Наоборот, события А и С совместны, поскольку они могут произойти одновременно.

Пространством элементарных исходов (или ***событий***), соответствующих рассматриваемому испытанию, будем называть такое множество несовместных событий, одно из которых обязательно произойдет в результате испытания, причём любой интересующий нас результат испытания может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества.

В примере с игральным кубиком пространство элементарных исходов образуют 6 событий: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, которые заключаются в том, что количество выпавших очков составит соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Действительно, эти события несовместны, одно из них обязательно произойдет в результате подбрасывания кубика, и с их помощью можно описать любые другие события. Например, событие A – выпало четное число очков – означает, что появились события E_2 или E_4 или E_6, эти три элементарных исхода благоприятствуют наступлению события A.

Элементарные исходы называются ***равновозможными,*** если ни у одного из них нет преимуществ перед другими, чтобы произойти в результате испытания. В рассмотренном выше примере с игральным кубиком все шесть элементарных исходов являются равновозможными.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события А называется число $\boldsymbol{P(A)}$, равное отношению количества $\boldsymbol{m}$ благоприятствующих событию A **элементарных** исходов к общему количеству $\boldsymbol{n}$ элементарных **равновозможных** исходов:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Рассмотрим пример с урновой схемой. Урна – это ёмкость с шарами.

Пример 4. Пусть в урне находится 20 одинаковых шаров, которые отличаются только цветом, например, 14 из них красные, а остальные – белые. Наугад извлечён один шар. Найдем вероятность того, что этот шар – красный.

Пусть событие K – извлечён красный шар. Всего элементарных исходов $n = 20$ (по количеству шаров), причём все эти исходы равновозможные. Событию K благоприятствует $m = 14$ исходов (по количеству красных шаров), поэтому

$$P(K) = \frac{m}{n} = \frac{14}{20} = 0{,}7.$$

Условной вероятностью $\boldsymbol{P_A(B)}$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло. Условная вероятность вычисляется по классическому определению вероятности, но при подсчёте общего количества элементарных исходов $\boldsymbol{n}$ и количества благоприятных событию B исходов $\boldsymbol{m}$ учитывается, что событие A уже произошло.

Пример 5. В урне имеется 3 белых и 2 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором извлечении (событие B), если первым был извлечен черный шар (событие A).

Решение. Изначально в урне было 5 шаров, среди которых 3 белых и 2 черных. После первого испытания, то есть после извлечения чёрного шара, в урне осталось 4 шара, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B) = 3/4$.

Вероятность любого события может принимать значения только от 0 до 1 включительно, то есть

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Достоверное событие – обязательно произойдет в результате испытания, так как все исходы благоприятные, то есть $m = n$:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Невозможное событие – не может произойти в результате испытания, так как благоприятных исходов нет, то есть $m = 0$:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Случайное событие – может произойти или не произойти в результате испытания: $0 < P(A) < 1$.

Вероятность является **числовой мерой** объективной возможности наступления события.

Вероятность можно задать в процентах, например, если $P(A)=$ 0,8, то это означает, что $P(A) = 0{,}8 \cdot 100\% = 80\%$.

Основные теоремы теории вероятностей

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из этих событий не изменяет вероятности наступления другого, то есть $P(A) = P_B(A)$ или $P(B) = P_A(B)$. В противном случае события называются ***зависимыми***.

Теорема сложения вероятностей **несовместных** событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей **независимых** событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей **зависимых** событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Эти теоремы справедливы и записываются аналогично, для любого конечного количества событий $A, B, C, \ldots, D$.

Теорема сложения вероятностей для **двух** любых, в том числе и **совместных** событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$$

Событие $\overline{A}$ (не A) называется ***противоположным*** событию A, если оно наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A. Например:

a) событие A – изделие бракованное,

событие $\overline{A}$ – изделие без брака;

b) событие B – студент сдал экзамен,

событие $\overline{B}$ – студент не сдал экзамен;

c) событие C – хотя бы один лотерейный билет выиграл,

событие $\overline{C}$ – ни один билет не выиграл.

Из приведенных примеров видно, что противоположное событие можно сформулировать путем простого логического отрицания.

Для противоположных событий $P(A)+P(\overline{A})=1$. Отсюда следует, что вероятность противоположного события находится по формуле: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Задача. В партии, состоящей из 20 одинаково упакованных изделий, смешаны изделия двух сортов, причем 12 из этих изделий – первого сорта, а остальные изделия – второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся:

а) одного сорта;

б) разных сортов.

Решение.

Обозначим: событие A_1 – первое взятое изделие первого сорта;

событие A_2 – второе взятое изделие первого сорта;

событие B_1 – первое взятое изделие второго сорта;

событие B_2 – второе взятое изделие второго сорта.

Очевидно, что по классическому определению вероятности:

$P(A_1)$ = 12/20, так как имеется 12 изделий I сорта из 20 изделий;

$P(B_1)$ = 8/20, так как изделий II сорта 20 – 12 = 8 изделий из 20.

События A_2 и B_2 зависят от событий A_1 и B_1, поэтому их вероятности будут условными:

$P_{A1}(A_2)$ = 11/19, так как при условии, что первое извлечённое изделие I сорта, останется 19 изделий, из которых I сорта 11 штук.

$P_{B1}(A_2)$ = 12/19 так как при условии, что первое извлечённое изделие II сорта, останется 19 изделий, из которых I сорта будет 12.

$P_{A1}(B_2)$ = 8/19 так как при условии, что первое извлечённое изделие I сорта, останется 19 изделий, из которых II сорта будет 8.

$P_{B1}(B_2)$ = 7/19 так как при условии, что первое извлечённое изделие II сорта, останется 19 изделий, из них II сорта останется 7 изделий.

Далее используем теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения вероятностей для зависимых событий.

а) P(изделия одного сорта) = $P(A_1$ и A_2 или B_1 и $B_2)$ =
= $P(A_1$ и $A_2) + P(B_1$ и $B_2)$ = $P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) + P(B_1) \cdot P_{B1}(B_2)$ =
= $(12/20) \cdot (11/19) + (8/20) \cdot (7/19) = (132 + 56)/380 = 188/380 = 47/95$.

б) P(изделия разных сортов) = $P(A_1$ и B_2 или B_1 и $A_2)$ =
= $P(A_1$ и $B_2) + P(B_1$ и $A_2)$ = $P(A_1) \cdot P_{A1}(B_2) + P(B_1) \cdot P_{B1}(A_2)$ =
= $(12/20) \cdot (8/19) + (8/20) \cdot (12/19) = (96 + 96)/380 = 48/95 = 48/95$.

Контроль. События под буквами *а*) и *б*) противоположны, поэтому сумма их вероятностей должна быть равна единице. Действительно: $47/95 + 48/95 = 1$.

Ответ. 47/95; 48/95.

Формула полной вероятности

Задачи 31-40

На склад поступают однотипные изделия от трёх изготовителей. Первый изготовитель поставляет ***P*** % всей продукции, а остальную часть продукции поставляют поровну второй и третий изготовители. Вероятность того, что в процессе производства изделий первый изготовитель допустит брак составляет ***а*** **%,** а для второго и третьего изготовителей эти вероятности равны соответственно ***в*** % и ***с*** %. Со склада, где изделия перемешаны, взято наугад одно изделие.

а) Какова вероятность того, что это взятое изделие окажется бракованным?

б) Если взятое изделие оказалось бракованным, то какова вероятность того, что оно поступило от второго изготовителя?

31. ***P*** = 42% ; ***а*** = 9%; ***в*** = 10%; ***с*** = 8%.

32. ***P*** = 50% ; ***а*** = 7%; ***в*** = 9%; ***с*** = 12%.

33. $\boldsymbol{P} = 36\%$; $\boldsymbol{a} = 5\%$**;** $\boldsymbol{в} = 11\%$**;** $\boldsymbol{c} = 7\%$.

34. $\boldsymbol{P} = 34\%$; $\boldsymbol{a} = 4\%$**;** $\boldsymbol{в} = 12\%$**;** $\boldsymbol{c} = 15\%$.

35. $\boldsymbol{P} = 28\%$; $\boldsymbol{a} = 10\%$**;** $\boldsymbol{в} = 6\%$**;** $\boldsymbol{c} = 9\%$.

36. $\boldsymbol{P} = 44\%$; $\boldsymbol{a} = 6\%$**;** $\boldsymbol{в} = 10\%$**;** $\boldsymbol{c} = 12\%$.

37. $\boldsymbol{P} = 40\%$; $\boldsymbol{a} = 8\%$**;** $\boldsymbol{в} = 7\%$**;** $\boldsymbol{c} = 15\%$.

38. $\boldsymbol{P} = 32\%$; $\boldsymbol{a} = 13\%$**;** $\boldsymbol{в} = 5\%$**;** $\boldsymbol{c} = 8\%$.

39. $\boldsymbol{P} = 48\%$; $\boldsymbol{a} = 12\%$**;** $\boldsymbol{в} = 8\%$**;** $\boldsymbol{c} = 10\%$.

40. $\boldsymbol{P} = 30\%$; $\boldsymbol{a} = 15\%$**;** $\boldsymbol{в} = 9\%$**;** $\boldsymbol{c} = 6\%$.

Методические указания к решению задач 31 – 40

Полная группа событий

События H_1 , H_2 , ..., H_n образуют **полную группу**, если они попарно несовместны и в результате испытания одно из них обязательно произойдет.

Для таких событий справедливо равенство:

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Очевидно, что два противоположных события образуют полную группу:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пусть событие A наступает с одним из событий (гипотез) $H_{\boldsymbol{i}}$, тогда вероятность этого события A находится по ***формуле полной вероятности*:**

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где события $H_{\mathbf{1}}$, $H_{\mathbf{2}}$, ..., $H_{\boldsymbol{n}}$ образуют полную группу.

Формула Байеса

По этой формуле находится вероятность наступления гипотезы H_k при условии, что событие A произошло:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(Hi) \cdot P_{Hi}(A)}.$$

Здесь в знаменателе стоит вероятность события A, вычисляемая по формуле полной вероятности, а в числителе – одно из слагаемых формулы полной вероятности.

Задача. На склад поступают однотипные изделия от трёх изготовителей. Первый изготовитель поставляет 38% всей продукции, а остальную часть продукции поставляют поровну второй и третий изготовители. Вероятность того, что в процессе производства изделий первый изготовитель допустит брак, составляет 7%, а для второго и третьего изготовителей эти вероятности равны соответственно 14% и 9%. Со склада, где изделия перемешаны, взято наугад одно изделие.

а) Какова вероятность того, что это взятое изделие окажется бракованным?

б) Если взятое изделие оказалось бракованным, то какова вероятность того, что оно поступило от второго изготовителя?

Решение. Обозначим:

событие A – взятое наугад изделие оказалось бракованным;
событие H_1 – изделие поступило от первого изготовителя;
событие H_2 – изделие поступило от второго изготовителя;
событие H_3 – изделие поступило от третьего изготовителя.

По условию задачи первый изготовитель поставляет 38% всей продукции, следовательно, второй и третий изготовители поставляют оставшиеся 100% – 38% = 62% продукции поровну, то есть каждый по 31%.

Отсюда имеем: $P(H_1) = 0{,}38$; $P(H_2) = 0{,}31$; $P(H_3) = 0{,}31$.
Очевидно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий, поэтому $P(H_1)+ P(H_2)+P(H_3) =0{,}38+0{,}31+0{,}31= 1$.

Вероятность, что первый изготовитель поставит бракованное изделие составляет 7%, то есть условная вероятность события A

при условии H_1 равна: $P_{H1}(A)$ = 0,07. Аналогично, для второго изготовителя $P_{H2}(A)$ = 0,14, а для третьего $P_{H3}(A)$ = 0,09.

а) Учитывая, что событие *A* произойдет обязательно с одним из событий (гипотез) H_i образующих полную группу, применим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =$$

$$= 0{,}38 \cdot 0{,}07 + 0{,}31 \cdot 0{,}14 + 0{,}31 \cdot 0{,}09 = 0{,}0979\ (9{,}79\%).$$

б) По условию событие *A* произошло, то есть взято бракованное изделие, тогда вероятность гипотезы H_2 – изделие поступило от второго изготовителя, находим по формуле Байеса:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)\cdot P_{H2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H3}(A)} =$$

$$= \frac{0{,}31\cdot 0{,}14}{0{,}38\cdot 0{,}07 + 0{,}31\cdot 0{,}14 + 0{,}31\cdot 0{,}09} = \frac{0{,}0434}{0{,}0979} = 0{,}4433\,(44{,}33\%).$$

Ответ. $P(A)$ = 0,098; $P_{H2}(A)$ = 0,4433.

Повторение независимых испытаний

Задачи 41-50

Изготовитель производит в среднем ***P*** % продукции отличного качества.

1) Какова вероятность, что из ***n*** взятых наугад изделий окажутся:

а) ровно ***k*** изделий отличного качества;

б) не менее ***m*** изделий отличного качества;

в) хотя бы одно изделие отличного качества.

2) Каково наивероятнейшее количество изделий отличного качества среди ***n*** взятых изделий, и какова соответствующая ему вероятность?

41. ***P*** = 80%; ***n*** = 9; ***k*** = 6; ***m*** = 8.

42. ***P*** = 95%; ***n*** = 6; ***k*** = 4; ***m*** = 5.

43. ***P*** = 70%; ***n*** = 7; ***k*** = 4; ***m*** = 6.

44. $\boldsymbol{P}$ = 60%; $\boldsymbol{n}$ = 4; $\boldsymbol{k}$ = 2; $\boldsymbol{m}$ = 3.

45. $\boldsymbol{P}$ = 85%; $\boldsymbol{n}$ = 6; $\boldsymbol{k}$ = 3; $\boldsymbol{m}$ = 5.

46. $\boldsymbol{P}$ = 75%; $\boldsymbol{n}$ = 8; $\boldsymbol{k}$ = 5; $\boldsymbol{m}$ = 7.

47. $\boldsymbol{P}$ = 90%; $\boldsymbol{n}$ = 6; $\boldsymbol{k}$ = 1; $\boldsymbol{m}$ = 5.

48. $\boldsymbol{P}$ = 65%; $\boldsymbol{n}$ = 7; $\boldsymbol{k}$ = 3; $\boldsymbol{m}$ = 6.

49. $\boldsymbol{P}$ = 90%; $\boldsymbol{n}$ = 5; $\boldsymbol{k}$ = 2; $\boldsymbol{m}$ = 4.

50. $\boldsymbol{P}$ = 80%; $\boldsymbol{n}$ = 8; $\boldsymbol{k}$ = 3; $\boldsymbol{m}$ = 7.

Методические указания к решению задач 41 – 50

Формула Бернулли

Пусть вероятность появления события A в каждом испытании одинакова и равна $P(A) = \boldsymbol{p}$, тогда вероятность не появления события A для каждого испытания $P(\overline{A}) = 1 - p = \boldsymbol{q}$. Испытание повторяется $\boldsymbol{n}$ раз. Требуется найти вероятность того, что событие A наступит при этом ровно $\boldsymbol{k}$ раз.

Обозначим $\boldsymbol{P_n(k)}$ – вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$ испытаниях событие A наступит $\boldsymbol{k}$ раз. Эта вероятность находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

! - знак факториала, математической операции такой, что
$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$.

Например: 1! = 1
2! = 1·2=2
3! = 1·2·3=6
4! = 1·2·3·4=24
5! = 1·2·3·4·5=120 и т. д.

Внимание: 0!=1

Наивероятнейшее число появлений события

Пусть в $\boldsymbol{n}$ повторных испытаниях событие A появляется $\boldsymbol{k}$ раз, где $\boldsymbol{k}$ может принимать значения: 0; 1; 2; …; n (то есть $0 \le \boldsymbol{k} \le n$).

Для каждого из этих значений $\boldsymbol{k}$ можно найти соответствующую ему вероятность по формуле Бернулли.

Значение $\boldsymbol{k}$, которому соответствует самая большая вероятность, называется ***наивероятнейшим*** числом появления события A, и обозначается $\boldsymbol{k_0}$.

Наивероятнейшее число $\boldsymbol{k_0}$ находится как ***целое число*** из промежутка:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \ .$$

При этом $\boldsymbol{k_0}$ может принимать либо одно значение, либо два соседних целых значения, и тогда их вероятности совпадают.

Вероятность $P_{\boldsymbol{n}}(k_0)$, соответствующую значению $k = k_0$, находим по формуле Бернулли.

Появление события хотя бы один раз

Вероятность появления события «хотя бы один раз» в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях находится с помощью противоположного ему события «ни одного раза», то есть стрелок промахнется все $\boldsymbol{n}$ раз, следовательно, число попаданий $k = 0$:

P_n(событие наступит хотя бы 1раз) = 1 – P_n (не наступит ни разу)

$$= 1 - P_n(0) = 1 - \frac{n!}{0! \cdot n!} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1 - q^n \ ,$$

при этом учтено, что $0! = 1$ и $p^0 = 1$.

Событие «наступит хотя бы один раз» означает, что оно наступит один раз или более, поэтому можно записать:

$$\boldsymbol{P_n(k \geq 1) = 1 - q^n} \ .$$

Задача. Стрелок поражает цель с вероятностью 70%.

1) С какой вероятностью в серии из 5 выстрелов он поразит мишень:

а) ровно два раза;

б) не менее четырех раз.

в) хотя бы один раз.

2) Каково наивероятнейшее число попаданий в мишень и чему равна соответствующая ему вероятность?

Решение. 1) По условию задачи: $\boldsymbol{p} = 0{,}7$; $\boldsymbol{n} = 5$; $\boldsymbol{k} = 2$; $\boldsymbol{m} = 4$; Вероятность промаха $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

а) Вероятность попадания ровно два раза в серии из пяти выстрелов находим по формуле Бернулли.

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 10 \cdot 0{,}01323 = 0{,}1323.$$

б) Событие «стрелок поразит мишень не менее четырех раз» запишем в виде: $m \geq 4$, тогда

$$P_5(m \geq 4) = P_5(4 \text{ или } 5) = P_5(4) + P_5(5).$$

Здесь применена теорема сложения вероятностей несовместных событий. Используя формулу Бернулли, найдем:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} \cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 5 \cdot 0{,}2401 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015,$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot p^5 \cdot 1 = 0{,}7^5 = 0{,}16807.$$

Здесь учтено, что $0! = 1$ и $q^0 = 1$.

Окончательно получим: $P_5(m \geq 4) = 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}52822$..

в) Обозначим буквой D – событие: «стрелок поразит мишень хотя бы 1 раз», тогда

$$P(D) = P_n(k \geq 1) = 1 - q^n = 1 - 0{,}3^{\mathbf{5}} = 1 - 0{,}00243 = 0{,}99757.$$

2) Наивероятнейшее число попаданий $\boldsymbol{k_0}$ находим как **целое** число из промежутка

$$\boldsymbol{np - q \leq k_0 \leq np + p}$$

$$5 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \leq \boldsymbol{k_0} \leq 5 \cdot 0{,}7 + 0{,}7$$

$$3{,}2 \leq \boldsymbol{k_0} \leq 4{,}2$$

Очевидно, что $\boldsymbol{k_0} = 4$, так как это единственное целое число в указанном промежутке.

Соответствующая ему вероятность $P_5(4)$ находится по формуле Бернулли. В данной задаче она уже была найдена выше:

$$P_5(4)=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}7^4\cdot 0{,}3=0{,}36015.$$

Ответ.

1) *а*) $P_5(2)$= 0,1323; *б*) $P_5(k \geq 4)$ = 0,52822; *в*) $P_5(k \geq 1)$= 0,99757;

2) k_0 = 4; $P(k_0)$ = 0,36015.

Случайные величины

Дискретная случайная величина

Задачи 51 – 60

В рекламных целях торговая фирма вкладывает в свой товар случайным образом некоторые призы. На каждые 100 единиц товара приходится $\boldsymbol{m_1}$ призов стоимостью $\boldsymbol{a_1}$ рублей, $\boldsymbol{m_2}$ призов стоимостью $\boldsymbol{a_2}$ рублей, $\boldsymbol{m_3}$ призов стоимостью $\boldsymbol{a_3}$ рублей и т. д. В остальных единицах товара призов нет.

Составить закон распределения величины стоимости приза для покупателя, купившего одну единицу товара этой фирмы и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию (двумя способами) и среднее квадратическое отклонение. Пояснить смысл полученных результатов.

Найти вероятность того, что покупатель одной единицы товара станет обладателем выигрыша не менее $\boldsymbol{a_3}$ рублей.

51. a_1=200; a_2=100; a_3= 50; a_4= 30; a_5= 10;
m_1=2; m_2=5; m_3=8; m_4=10; m_5=15.

52. a_1=300; a_2=150; a_3=100; a_4=50;
m_1=5; m_2=15; m_3=10; m_4=20.

53. a_1=500; a_2=120; a_3= 80; a_4= 40;
m_1=1; m_2=14; m_3=15; m_4=20.

54. a_1=160; a_2=100; a_3= 60; a_4= 30; a_5= 20; a_6= 10;
m_1=2; m_2=5; m_3=8; m_4=10; m_5=12; m_6=13.

55. a_1=100; a_2= 80; a_3= 60; a_4= 40; a_5= 20; a_6= 10;
m_1=5; m_2=10; m_3=12; m_4=15; m_5=18; m_6=20.

56. a_1=600; a_2=300; a_3= 100; a_4= 50; a_5= 10;
m_1=2; m_2=4; m_3=6; m_4=10; m_5=18.

57. a_1=250; a_2=150; a_3= 80; a_4= 50; a_5= 10;
m_1=2; m_2=8; m_3=10; m_4=12; m_5=18.

58. a_1=400; a_2=100; a_3= 60; a_4= 30; a_5= 10;
m_1=3; m_2=8; m_3=12; m_4=27; m_5=30.

59. a_1=350; a_2=200; a_3= 80; a_4= 20;
m_1=4; m_2=6; m_3=10; m_4=20.

60. a_1=450; a_2=120; a_3= 60; a_4= 20;
m_1=2; m_2=8; m_3=15; m_4=25.

Методические указания к решению задач 51 – 60

Дискретная случайная величина, её основные характеристики

Случайной величиной называется переменная, принимающая свои возможные числовые значения с определенной вероятностью.
Например: X – балл, который можно получить на экзамене;
Y – число студентов, которые могут посетить лекцию;
Z – возможная величина выигрыша в лотерее;
U – рост случайно выбранного человека и т.п.

Дискретная случайная величина X принимает отдельные числовые значения. Закон распределения дискретной случайной величины записывается в виде таблицы, где перечислены все возможные значения случайной величины X и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Следует иметь в виду, что всегда $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$

Основные числовые характеристики закона распределения дискретной случайной величины.

1) ***Математическое ожидание***, ожидаемое среднее значение случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... x_n \ p_n = a.$$

2) ***Дисперсия,*** мера рассеяния значений случайной величины X от среднего значения ***a***:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a\ )^2 p_i = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + ... + (x_n - a)^2 p_n\ .$$

Второй способ вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

где *M(X)* определено выше, а

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n{}^2 p_n = \sum x_i^2 p_i\ .$$

3) ***Среднее квадратическое отклонение*** (характеристика рассеяния в единицах признака X):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Задача. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 2 билета с выигрышем по 50 тыс. рублей, 5 билетов по 20 тыс. рублей, 10 билетов по 10 тыс. рублей, 20 билетов по 5 тыс. рублей и 25 билетов по 3 тыс. рублей. Остальные билеты не выигрывают. Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики.

Найти вероятность того, что владелец одного лотерейного билета товара станет обладателем выигрыша не менее *5* тыс. рублей.

Решение. Обозначим за X тыс. рублей – величину выигрыша на один билет. Очевидно, что X – случайная дискретная величина. Составим закон распределения этой случайной величины, перечислив все ее возможные значения и найдя соответствующие им вероятности. Число выигрышных билетов из 100 составляет: 2+5+10+20+25=62, значит, число невыигрышных билетов: 100–62= = 38.

Располагая величины возможного выигрыша x_i в порядке возрастания, получим следующую таблицу:

x_i	0	3	5	10	20	50
p_i	0,38	0,25	0,20	0,10	0,05	0,02

где $p_1 = P(X=0) = \frac{38}{100} = 0{,}38$; $p_2 = P(X=3) = \frac{25}{100} = 0{,}25$ и т. д.

Отметим, что $\sum p_i = 0{,}38 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}02 = 1.$

1) Математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0\cdot0{,}38 + 3\cdot0{,}25 + 5\cdot0{,}2 + 10\cdot0{,}1 + 20\cdot0{,}05 + 50\cdot0{,}02 = 4{,}75.$$

Таким образом, ожидаемый средний выигрыш на 1 билет составляет 4,75 тыс. рублей.

2) Дисперсию случайной величины найдем двумя способами:

а) $$D(X) = \sum_{i=1}^{6} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i =$$

$$= (0-4{,}75)^2 \cdot 0{,}38 + (3-4{,}75)^2 \cdot 0{,}25 + (5-4{,}75)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (10-4{,}75)^2 \cdot 0{,}1 + (20-4{,}75)^2 \cdot 0{,}05 + (50-4{,}75)^2 \cdot 0{,}02 =$$

=8,57375+0,76525+0,0125+2,75625+11,628125+40,95125=64,6875.

б) $$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

$$M(X^2) = \sum x_i^2 \cdot p_i = 0^2\cdot0{,}38 + 3^2\cdot0{,}25 + 5^2\cdot0{,}2 + 10^2\cdot0{,}1 + 20^2\cdot0{,}05 + 50^2\cdot0{,}02 =$$

$$= 0 + 2{,}25 + 5 + 10 + 20 + 50 = 87{,}25.$$

Тогда: $D(X) = 87{,}25 - (4{,}75)^2 = 87{,}25 - 22{,}5625 = 64{,}6875$.

Результаты вычислений дисперсии по обоим способам совпадают.

3) Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{64{,}6875} \approx 8{,}04285.$$

Таким образом, $\boldsymbol{\sigma}$ = 8,04285 тыс. рублей – характеристика разброса фактических значений выигрыша от найденного среднего значения, $\boldsymbol{a}$ = 4,75 тыс. рублей. Это означает, что основные значения случайной величины выигрыша находятся в диапазоне $(4{,}75 \pm 8{,}04285)$ тыс. рублей, что соответствует таблице данных.

Найдём вероятность того, что выигрыш X составит не менее 5 тыс. рублей, то есть $X \geq 5$. Этому событию противоположно событие $X < 5$, которое в свою очередь означает, что X=3 или X=0. Используя формулу для нахождения вероятности противоположного события и теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получим:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X=0 \text{ или } X=3) = 1 - (P(X=0) + P(X=3)) =$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=3) = 1 - 0{,}38 - 0{,}25 = 0{,}37.$$

Здесь из таблицы распределения вероятностей взяты значения: $P(X=0) = 0{,}38$; $P(X=3) = 0{,}25$.

Ответ. $M(X)=4{,}75$; $D(X)=64{,}6875$; $\sigma(X)=8{,}04285$; $P(X>5)=0{,}37$.

Непрерывная случайная величина

Задачи 61 -70

Вес одной порции мясного блюда должен быть $\boldsymbol{a}$ граммов. В процессе приготовления возникают случайные погрешности, в результате которых вес порционного блюда является случайной величиной подчиненной нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ граммов.

Найти вероятность того, что:

а) вес изделия составит от α до β граммов;

б) величина погрешности веса будет менее δ граммов по абсолютной величине.

61. $a = 100$; $\sigma = 5$; $\alpha = 90$; $\beta = 105$; $\delta = 10$.

62. $a = 110$; $\sigma = 8$; $\alpha = 95$; $\beta = 115$; $\delta = 12$.

63. $a = 120$; $\sigma = 7$; $\alpha = 98$; $\beta = 125$; $\delta = 14$.

64. $a = 130$; $\sigma = 6$; $\alpha = 110$; $\beta = 135$; $\delta = 16$.

65. $a = 140$; $\sigma = 9$; $\alpha = 120$; $\beta = 145$; $\delta = 10$.

66. $a = 150$; $\sigma = 5$; $\alpha = 145$; $\beta = 165$; $\delta = 15$.

67. $a = 160$; $\sigma = 6$; $\alpha = 150$; $\beta = 165$; $\delta = 16$.

68. $a = 125$; $\sigma = 7$; $\alpha = 120$; $\beta = 135$; $\delta = 14$.

69. $a = 155$; $\sigma = 8$; $\alpha = 150$; $\beta = 165$; $\delta = 15$.

70. $a = 145$; $\sigma = 9$; $\alpha = 140$; $\beta = 155$; $\delta = 12$.

Методические указания к решению задач 61 – 70

Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина *X* может принимать любые значения из некоторого промежутка. Распределение вероятностей ее значений ***x*** на этом промежутке задается дифференциальной функцией распределения *f*(*x*), которая имеет смысл плотности вероятности.

Исследования показали, что в большом числе встречающихся на практике случаев с достаточным основанием можно считать, что случайные величины распределены по нормальному закону.

Дифференциальная функция нормального распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}},$$

где ***a*** - математическое ожидание; **σ** - среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*. Значения этой функции можно находить с помощью таблицы (см. Приложение 1).

Графиком этой функции является кривая Гаусса, наглядно показывающая характер распределения вероятностей для значений случайной величины *X* (Рис.1). При построении кривой для определённости взяты значения ***a*** = 8 и **σ** = 4. По графику видны особенности нормального распределения случайной величины *X*.

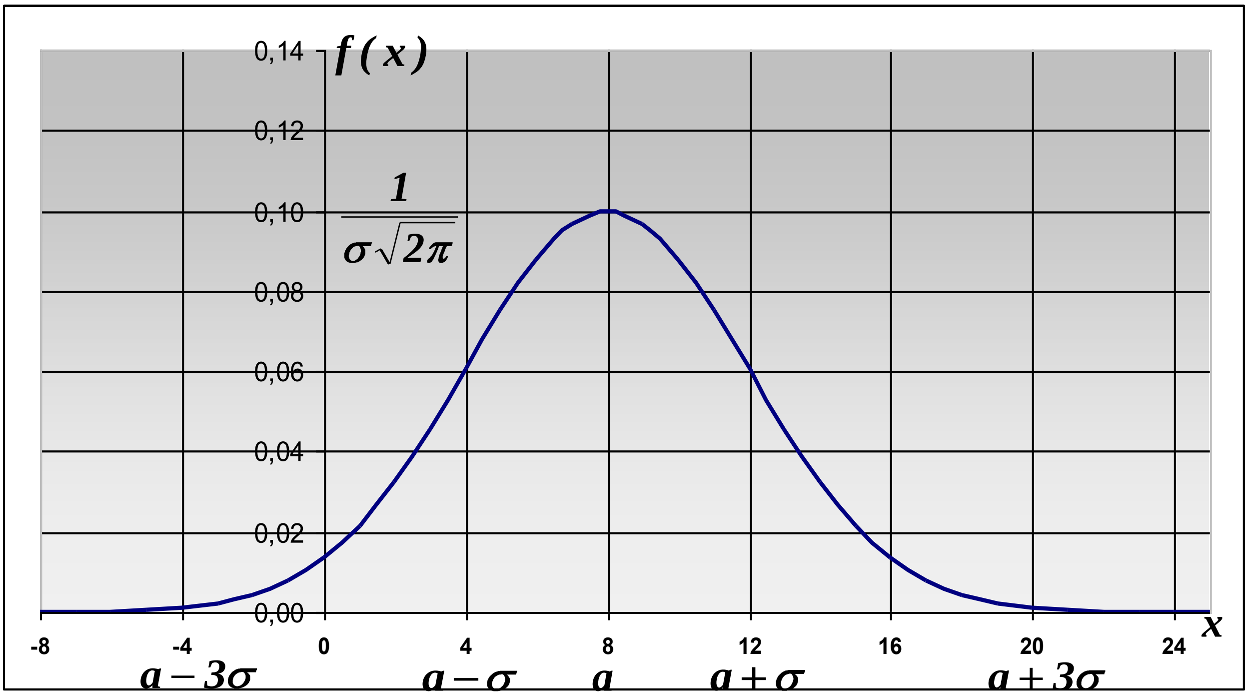

Рис. 1

Особенности нормального распределения

1) Наиболее вероятны значения X, близкие к ожидаемому среднему значению $\boldsymbol{a}$.

2) Отклонения значений X от среднего значения $\boldsymbol{a}$ в обе стороны равновероятны.

3) Большие отклонения значений X от $\boldsymbol{a}$ маловероятны.

Площадь под кривой Гаусса всегда равна единице, что соответствует полной вероятности. Поэтому при уменьшении $\boldsymbol{\sigma}$ плотность перераспределится ближе к $\boldsymbol{a}$, рассеяние уменьшится. При увеличении $\boldsymbol{\sigma}$ график кривой Гаусса становится более расплывчатым, что говорит об увеличении рассеяния.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha\,;\beta)$ находят по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой берут по таблице (см. Приложение 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения «X-a» меньше $\boldsymbol{\delta}$, равна:

$$P\left(|x-a|<\delta\right)= 2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, если $\delta=3\sigma$, получим:

$$P\left(|x-a|<3\sigma\right)= 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973 \approx 99{,}7\%.$$

Этот результат называют правилом «трех сигм»: почти достоверно (на 99,7%), что значения нормально распределенной случайной величины отличаются от своего среднего значения ***a*** менее, чем на 3σ, то есть практически все значения нормально распределенной случайной величины X находятся в интервале: (a–3σ; a+3σ), что соответствует графику кривой Гаусса (Рис.1).

Задача. Вес изготовленного серебряного изделия должен составлять 100 граммов. При изготовлении возможны случайные погрешности, в результате которых вес изделия случаен и подчинен нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 10 граммов. Требуется найти вероятность того, что:

а) вес изделия составит от 80 до 105 граммов;

б) величина погрешности в весе не превзойдет трёх граммов по абсолютной величине.

Решение.

По условию задачи, $\boldsymbol{a}=100$, $\boldsymbol{\alpha}= 80$, $\boldsymbol{\beta}=105$, $\boldsymbol{\sigma}= 10$, $\boldsymbol{\delta}= 3$.

а) Воспользуемся формулой:

$$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Тогда,

$$P\left(80<X<105\right)=\Phi\left(\frac{105-100}{10}\right)-\Phi\left(\frac{80-100}{10}\right)=$$

$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-2) = \Phi(0{,}5) + \Phi(2)$, здесь учтено что $\Phi(-2) = -\Phi(2)$.

По таблице Приложения 2 находим:

$$\Phi(0{,}5) = 0{,}1915;\ \ \Phi(2) = 0{,}4772.$$

Следовательно, искомая вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал (80;105) равна:

$$P(80 < X < 105) = 0{,}1915 + 0{,}4772 = 0{,}6687.$$

б) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения «*X*-***a***» меньше $\delta = 3$, находим по формуле:

$$P(|X-a|<\delta) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \text{ тогда}$$

$$P(|X-100|<3) = 2\cdot\Phi(3/10) = 2\cdot 0{,}1179 = 0{,}2358,$$

здесь значение $\Phi(3/10) = \Phi(0{,}3) = 0{,}1179$ взято по таблице Приложения 2.

Таким образом, найдена вероятность попадания случайной величины X в промежуток (100 ± 3), то есть от 97 до 103.

Ответ. 0,6687; 0,2358.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Математическая статистика базируется на теории вероятностей и является теоретической основой для всей статистики. Ее задачей является создание способов сбора и методов обработки статистической информации.

Обработка выборочных данных

Задачи 71 -80

По итогам выборочных обследований, для некоторой категории сотрудников, величина их дневного заработка x_i руб. и соответствующее количество сотрудников n_i, представлены в виде интервального статистического распределения.

а) Построить гистограмму относительных частот распределения.

б) Найти основные характеристики распределения выборочных данных: среднее выборочное значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам точечным образом.

г) Зная, что значения признака *X* в генеральной совокупности подчинены нормальному закону распределения, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания (генерального среднего значения) с надежностью γ, считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

71.

X	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0,95$

72.

X	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50
n_i	2	5	15	10	8

$\gamma = 0,90$

73.

X	40-46	46-52	52-58	58-64	64-70
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0,92$

74.

X	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52
n_i	7	12	18	13	15

$\gamma = 0,94$

75.

X	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80
n_i	5	12	20	15	8

$\gamma = 0,91$

76.

X	66-70	70-74	74-78	78-82	82-86	86-90
n_i	7	15	22	18	5	3

$\gamma = 0,93$

77.

X	36-42	42-48	48-54	54-60	60-66	66-72
n_i	8	13	15	15	7	2

$\gamma = 0,85$

78.

X	52-56	56-60	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80
n_i	5	15	25	18	12	8	2

$\gamma = 0,99$

79.

X	42-46	46-50	50-54	54-58	58-62	62-66	66-70
n_i	8	15	19	22	12	5	1

$\gamma = 0,98$

80.

X	80-82	82-84	84-86	86-88	88-90
n_i	3	7	20	15	5

$\gamma = 0,88$

Методические указания к решению задач 71 – 80

Статистическое распределение выборки

Выборочный метод – один из основных методов математической статистики. Его сущность заключается в том, что изучение большой совокупности объектов относительно некоторого количественного признака X производится по сравнительно небольшому числу случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется множество всех изучаемых объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется множество объектов, отобранных для изучения из генеральной совокупности. Выборка должна быть организована случайным образом, чтобы правильно представлять генеральную совокупность.

Объемом совокупности называется количество объектов в совокупности. Объем выборки $\boldsymbol{n}$**,** как правило, значительно меньше объема $\boldsymbol{N}$ генеральной совокупности: $\boldsymbol{n} \ll \boldsymbol{N}$.

Данные выборки записываются в виде таблицы, называемой статистическим распределением выборки:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

В первой строке перечислены все наблюдаемые значения признака X в порядке их возрастания (или убывания). Они называются вариантами x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$). Во второй строке указаны частоты n_i соответствующих вариант x_i , они показывают, сколько раз наблюдалось каждое значение признака X.

Очевидно, что сумма всех частот n_i равна объему выборки n:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Основные числовые характеристики выборки

1. **Средняя выборочная** (среднее взвешенное значение признака в выборке):

$$\bar{x}_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{к} x_i n_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k).$$

2. **Дисперсия выборочная**. Характеризует разброс (рассеяние) значений вариант $\boldsymbol{x_i}$ от выборочного среднего значения $\overline{x_в}$ и измеряется в квадратных единицах признака X:

$$D_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i = \frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \bar{x}_в)^2 n_2 + \ldots + (x_к - \bar{x}_в)^2 n_k \right].$$

Для вычисления дисперсии используется также другая, часто более удобная формула:

$$D_в = \overline{x_в^2} - (\bar{x}_в)^2,$$

где

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i; \qquad \overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i .$$

3. **Среднее квадратическое отклонение выборки –** это характеристика рассеяния значений признака в выборке от среднего выборочного значения в единицах признака *X:*

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

Точечные оценки генеральных характеристик

С помощью найденных выборочных характеристик $x_в, D_в, \sigma_в$ оцениваются соответствующие генеральные характеристики:

$\bar{X}$ – генеральная средняя;

D – генеральная дисперсия;

σ – генеральное среднее выборочное отклонение.

Точечными называются оценки с помощью числа. Они имеют следующий вид:

$$\bar{x} \approx \overline{x_в}; \quad D \approx \frac{n}{n-1} \cdot D_в = S_в, \quad \sigma \approx S_в = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в},$$

где $S_в^2$ - так называемая исправленная выборочная дисперсия.

Приведенные точечные оценки носят случайный характер, так как зависят от выборки. Эти оценки удовлетворяют следующим требованиям:

- ***Несмещённость***, означает отсутствие систематических ошибок, т. е. отклонений только в одну сторону от истинного значения.

- ***Состоятельность***, означает, что при увеличении объема выборки увеличивается вероятность того, что оценка будет более точной.
- ***Эффективность,*** означает, что оценка имеют самый незначительный разброс по сравнению с другими возможными несмещёнными оценками.

Интервальные оценки генеральных характеристик

Точечные оценки генеральных характеристик являются приближенными, причём точность их приближения неизвестна. Эти оценки могут оказаться далекими от истинных значений характеристик генеральной совокупности: $\overline{x} = a$, D,σ. Поэтому для оценки генеральных характеристик используются также интервальные оценки, когда неизвестная характеристика заключена в некотором интервале с заданной надежностью (вероятностью) γ. Такой интервал называется доверительным. Значения надежности берутся, как правило, высокими: 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999, что соответствует 90; 95; 99 или 99,9%.

Если количественный признак X в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, то с вероятностью γ доверительный интервал, заданный выражением

$$(\overline{x_в} - t\cdot\sigma/\sqrt{n};\quad \overline{x_в} + t\cdot\sigma/\sqrt{n}),$$

покрывает неизвестное математическое ожидание $\boldsymbol{a}$. Здесь вспомогательный параметр $\boldsymbol{t}$ находится из соотношения $2\cdot\Phi(t)=\gamma$ с помощью таблицы для интегральной функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. Приложение 2).

Графическое представление выборочных данных

Значения $\boldsymbol{n_i}$ называются абсолютными частотами, их сумма равна объему выборки: $\sum n_i = n$. Относительные частоты $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ показывают долю значений $\boldsymbol{x_i}$ в общем объеме выборки. Очевидно, что сумма всех относительных частот (долей) равна 1: $\sum w_i = 1$.

Графически дискретное статистическое распределение изображается в виде полигона частот, обычно относительных. **Полигон** представляет собой ломаную линию, соединяющую соседние точки с координатами ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{w_i}$).

Статистическое распределение выборки часто носит интервальный характер. В этом случае указывают числовые частичные интервалы, куда попадают значения признака *X*, и $\boldsymbol{n_i}$ –, количество значений, попавших в каждый частичный интервал.

Интервальное статистическое распределение изображается на графике в виде гистограммы относительных частот. **Гистограмма** – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников. В основании каждого прямоугольника лежит частичный интервал, а высотой прямоугольника является относительная частота $\boldsymbol{w_i}$, а чаще величина $\frac{w_i}{h_i}$, где $\boldsymbol{h_i}$ – длина частичного интервала. При таком построении площадь каждого частичного прямоугольника равна относительной частоте $\boldsymbol{w_i}$, а сумма всех площадей, то есть площадь ступенчатой фигуры, равна единице, так как $\sum w_i = 1$.

Задача. В результате выборочного наблюдения за вкладами клиентов банка получено следующее распределение клиентов по величине вклада X тыс. руб.:

X	До 100	100-200	200-300	300-400	400-500
$\boldsymbol{n_i}$	10	18	20	32	28

где $\boldsymbol{n_i}$ – количество клиентов с величиной вклада в заданном интервале.

а) Изобразить данное распределение графически, построив гистограмму относительных частот.

б) Найти основные характеристики выборки: среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) С надежностью 95% указать доверительный интервал для генеральной средней, приняв гипотезу о нормальном распределении признака *X*, и считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

Решение. Найдем объем выборки $\boldsymbol{n}$:

$$n = \sum n_i = 10 + 18 + 20 + 32 + 28 = 108,$$

то есть для обследования выбрано 108 клиентов.

а) Вычислим относительные частоты для каждого частичного интервала:

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{108} = 0{,}093; \qquad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{108} = 0{,}167;$$

$$w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{20}{108} = 0{,}185; \qquad w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{32}{108} = 0{,}296;$$

$$w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{28}{108} = 0{,}259\,.$$

Рекомендуем все вычисления вести с точностью до 0,001.

Контроль: $\sum w_i = 0{,}093 + 0{,}167 + 0{,}185 + 0{,}296 + 0{,}259 = 1$.

В итоге получено следующее интервальное распределение относительных частот признака *X:*

X	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
w_i	0,093	0,167	0,185	0,296	0,259

Шаг разбиения h это длина каждого частичного интервала: h=100. Строим гистограмму относительных частот (Рис. 2).

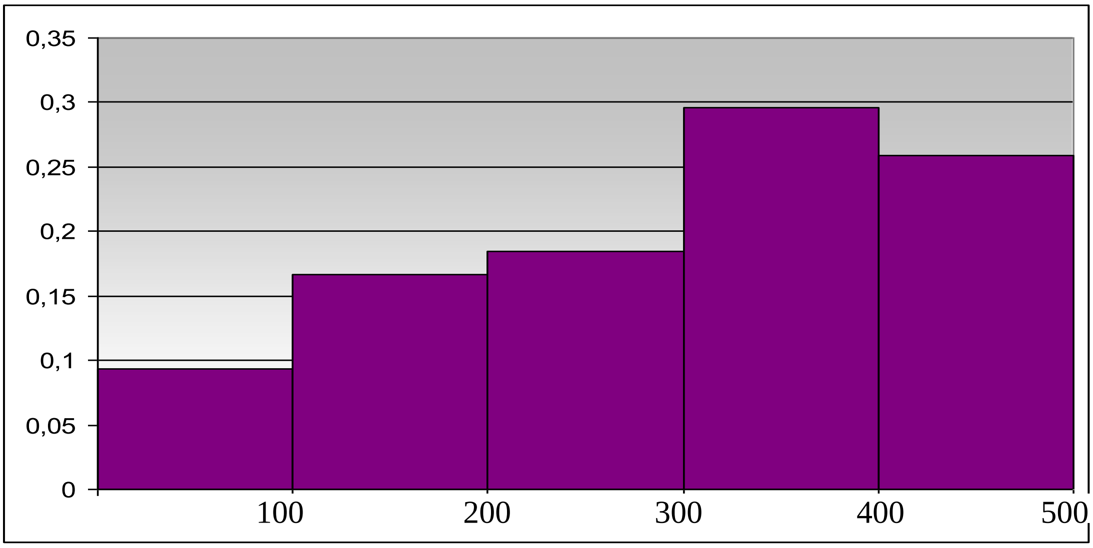

Рис. 2

На графике (Рис.2) по горизонтальной оси *OX* отложены частичные интервалы для признака *X*, а по вертикальной оси – значения относительных частот w_i.

б) Для нахождения характеристик выборки от заданного интервального распределения признака *X* перейдем к дискретному распределению, выбирая в качестве значений признака $\boldsymbol{x_i}$ середины частичных интервалов:

$\boldsymbol{x_i}$	50	150	250	350	450
$\boldsymbol{n_i}$	10	18	20	32	28

Найдем основные характеристики этого распределения.

1. Средняя выборочная (средняя величина вклада в тыс. рублей):

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i n_i = \frac{1}{108}(50 \cdot 10 + 150 \cdot 18 + 250 \cdot 20 + 350 \cdot 32 + 450 \cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(500 + 2700 + 5000 + 11200 + 12600) = \frac{1}{108} \cdot 32000 \approx 296{,}296.$$

2. Выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x_в})^2 \cdot n_i = \frac{1}{108} \cdot (50 - 296{,}296)^2 \cdot 10 + (150 - 296{,}296)^2 \cdot 18 +$$

$$+ (250 - 296{,}296)^2 \cdot 20 + (350 - 296{,}296)^2 \cdot 32 + (450 - 296{,}296)^2 \cdot 28 =$$

$$= \frac{1}{108}(606617{,}196 + 385245{,}353 + 42866{,}392 + 92291{,}828 +$$

$$+ 661497{,}749) = \frac{1}{108} \cdot 1788518{,}518 = 16560{,}3566.$$

Второй способ вычисления дисперсии.

Найдем среднее квадратов значений признака:

$$\overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2 n_i = \frac{1}{108}(50^2 \cdot 10 + 150^2 \cdot 18 + 250^2 \cdot 20 + 350^2 \cdot 32 + 450^2 \cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(25000 + 405000 + 1250000 + 3920000 + 5670000) =$$

$$= \frac{1}{108} \cdot 11270000 \approx 104351{,}852, \quad \text{тогда}$$

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 104351{,}852 - (296{,}296)^2 =$$

$$= 104351{,}8519 - 87791{,}4952 = 16560{,}3566.$$

Этот результат должен совпадать с результатом первого способа (иногда приближенно из-за округлений).

3. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{Dв} = \sqrt{16560{,}3566} \approx 128{,}687,$$

то есть, в среднем разброс вкладов составляет ± 128,687 тыс. рублей от среднего значения 296,296 тыс. рублей.

в) Оценим неизвестные генеральные характеристики.

Генеральная средняя: $\overline{x} \approx \overline{x_в} = 296{,}296$ тыс. рублей.

Генеральная дисперсия:

$$D \approx \frac{n}{n-1} D_в = \frac{108}{108-1} \cdot 16560{,}3566 \approx 16715{,}1263.$$

Генеральное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{16715{,}1263} \approx 129{,}287 \text{ (тыс. рублей)}.$$

г) Доверительный интервал для оценки генеральной средней ***a*** (среднего вклада) с надежностью γ находим по формуле:

$$a \in (\overline{x_в} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_в} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}).$$

По условию задачи $n = 108$, $\overline{x_в} = 296{,}296$; $\sigma = 129{,}287$, $\gamma = 0{,}95$. Неизвестный параметр t находим из условия: 2Ф(*t*) = γ. Поскольку в данной задаче $\gamma = 0{,}95$, то есть 2Ф(*t*) = 0,95, то Ф*(t)* = 0,475. По таблице Приложения 2, находим *t* = 1,96.

Вычислим по этим данным доверительный интервал:

$$(296{,}296 - 1{,}96 \cdot \frac{129{,}287}{\sqrt{108}}; \;\; 296{,}296 + 1{,}96 \cdot \frac{129{,}287}{\sqrt{108}}),$$

$$(296{,}296 - 24{,}384; \;\; 296{,}296 + 24{,}384),$$

$$(271{,}912; \; 320{,}680).$$

Таким образом, с вероятностью 95% неизвестная генеральная средняя (математическое ожидание) находится в этом интервале:

$$\overline{x} = a \in (271{,}912; \;\; 320{,}680).$$

Длина полуинтервала $\delta = t \cdot \sigma / \sqrt{n} = 24{,}384$ характеризует точность оценки и называется предельной ошибкой оценки. Оценка тем точнее, чем меньше $\boldsymbol{\delta}$ и, следовательно, доверительный интервал становится более узким. Величина предельной ошибки δ зависит от $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{t}$. Очевидно, что с увеличением объема выборки $\boldsymbol{n}$ предельная ошибка δ уменьшается и, следовательно, точность оценки повышается. При увеличении рассеяния $\boldsymbol{\sigma}$ предельная ошибка δ увеличивается, то есть оценка делается менее точной. Увеличение надежности γ ведет к росту вспомогательного параметра $\boldsymbol{t}$ и расширению доверительного интервала (надежнее попасть в большой интервал). Это делает оценку менее точной. Таким образом, при повышении надежности оценки ухудшается ее точность.

Элементы теории корреляции

Задачи 81 – 90

С целью анализа взаимного влияния прибыли предприятия и его издержек выборочно были проведены наблюдения за этими показателями в течение ряда месяцев: X – величина месячной прибыли в тысячах рублях, Y – месячные издержки в процентах к объему продаж. Результаты выборки представлены в виде таблицы. По данным выборки:

а) Оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y.

б) Найти зависимость между признаками в виде уравнения линейной регрессии $\overline{y}_x = ax + b$.

в) Построить графически наблюдаемые выборочные значения признаков и прямую регрессии.

г) Используя уравнение линейной регрессии, спрогнозировать величину месячных издержек в процентах к объему продаж, если величина месячной прибыли будет составлять $X = K$ тысяч рублей.

81.

X	20	30	40	50	60
Y	25	22	20	16	10

$K = 70$

82.

X	25	35	45	55	65
Y	23	21	18	14	9

$K = 75$

83.

X	30	40	50	60	70
Y	28	25	20	15	11

$K = 80$

84.

X	35	45	55	65	75
Y	26	20	18	16	12

$K = 85$

85.

X	40	50	60	70	80
Y	23	20	18	16	9

$K = 90$

86.

X	45	55	65	75	85
Y	25	21	18	14	8

$K = 95$

87.

X	50	60	70	80	90
Y	26	23	20	18	12

$K = 100$

88.

X	55	65	75	85	95
Y	24	20	18	15	10

$K = 105$

89.

X	60	70	80	90	100
Y	25	23	19	14	11

$K = 110$

90.

X	65	75	85	95	105
Y	27	24	20	15	12

$K = 115$

Методические указания к решению задач 81 – 90

Виды зависимостей

Пусть каждый из рассматриваемых объектов характеризуется двумя признаками X и Y. Между этими признаками X и Y могут существовать различные виды зависимостей.

Функциональная зависимость – это «жёсткая» зависимость, когда каждому значению признака X соответствует единственное значение признака Y. Зависимость задается в виде функции $y = f(x)$.

Статистическая зависимость – в этом случае каждому значению признака X соответствует статистическое распределение признака Y. Эта зависимость задается в виде корреляционной таблицы.

Корреляционная зависимость – это частный случай статистической зависимости, когда каждому значению x признака X соответствует среднее значение $\overline{y}_x$ признака Y и связь между ними достаточно хорошо описывается функцией $\overline{y}_x = f(x)$. Последнее равенство называется уравнением регрессии Y по X.

Аналогично, если каждому значению признака Y соответствует среднее значение $\overline{x}_y = \varphi(y)$, то последнее равенство называется уравнением регрессии X по Y.

Корреляционная зависимость показывает, как среднее значение одного из признаков приближённо зависит от значений другого признака. Эта зависимость может проявляться с разной степенью силы и описывается уравнением регрессии.

Две основные задачи теории корреляции:

1) оценить силу (тесноту) связи между признаками X и Y;
2) найти вид (форму) этой связи в виде уравнения регрессии.

Наиболее простой и употребляемый вид связи – линейная связь. Она задается уравнением линейной регрессии $\overline{y}_x = a \cdot x + b$ и изображается на графике в виде прямой регрессии.

Оценка тесноты линейной связи

Оценка тесноты линейной связи между признаками X и Y производится с помощью коэффициента линейной корреляции ***r***:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Коэффициент r может принимать значения от –1 до +1 включительно:

$$-1 \le \boldsymbol{r} \le 1 \qquad \text{или} \qquad |\boldsymbol{r}| \le 1.$$

Знак r указывает направление связи: прямая или обратная. Абсолютная величина $|\boldsymbol{r}|$ указывает на силу (тесноту) связи и устанавливается по приведённой ниже шкале.

Шкала Чаддока

Значение $\lvert \mathbf{r} \rvert$	0-0,1	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99	1
Теснота линейной связи	Связи нет	Слабая	Умерен-ная	Замет-ная	Высо-кая	Очень высокая	Функцио-нальная

При $\boldsymbol{r} > 0$ связь **прямая**, то есть с ростом $\boldsymbol{x}$ растет $\boldsymbol{y}$.
При $\boldsymbol{r} < 0$ связь **обратная**, то есть с ростом $\boldsymbol{x}$ убывает $\boldsymbol{y}$.

Уравнение линейной регрессии

Уравнение регрессии показывает, как средние значения одного признака $\boldsymbol{y}$ зависят от значений другого признака $\boldsymbol{x}$. Часто эта зависимость является линейной:

$$\overline{y}_x = ax + b.$$

Параметры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в уравнении линейной регрессии находятся по методу наименьших квадратов, который приводит к следующим формулам для их вычисления:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^{\,2}};$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}.$$

Задача. С целью анализа взаимного влияния прибыли предприятия и его издержек выборочно были проведены наблюдения за этими показателями в течение ряда месяцев: X – величина месячной прибыли в тысячах рублях, Y – месячные издержки в процентах к объему продаж. Результаты выборки представлены в виде таблицы:

X	50	56	60	62	65	72	78
Y	20,4	18,1	15,2	10,6	8,8	8,7	8,0

По данным выборки:

а) Оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y.

б) Найти зависимость между признаками в виде уравнения линейной регрессии $\overline{y}_x = a \cdot x + b$.

в) Построить графически наблюдаемые выборочные значения признаков и прямую регрессии.

г) Используя уравнение линейной регрессии, спрогнозировать величину месячных издержек в процентах к объему продаж, если величина месячной прибыли будет составлять 82 тысячи рублей.

Решение. По условию имеется $\boldsymbol{n}$ = 7 наблюдений для соответственных значений признаков X и Y.

Найдем средние значения признаков $\overline{x}$ и $\overline{y}$, а также их средние квадратические отклонения σ_x и σ_y по тем же формулам, что и в предыдущей задаче, но с учетом того, что каждое значение признака встречается только один раз, то есть все $\boldsymbol{n_i}$ = 1.

Вычисления будем вести с точностью до 0,001.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{7}(50 + 56 + 60 + 62 + 65 + 72 + 78) = \frac{443}{7} \approx 63{,}286 \; ;$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i n_i}{n} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1}{7}(20{,}4 + 18{,}1 + 15{,}2 + 10{,}6 + 8{,}8 + 8{,}7 + 8{,}0) =$$

$$= \frac{89{,}80}{7} \approx 12{,}829 \; ;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{1}{7}(50 \cdot 20{,}4 + 56 \cdot 18{,}1 + 60 \cdot 15{,}2 + 62 \cdot 10{,}6 + 65 \cdot 8{,}8 +$$

$$+ 72 \cdot 8{,}7 + 78 \cdot 8{,}0) = \frac{1}{7} \cdot 5425{,}2 \approx 775{,}029 \; ;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{1}{7}(50^2 + 56^2 + 60^2 + 62^2 + 65^2 + 72^2 + 78^2) \approx 4081{,}857;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y_i^2}{n} = \frac{1}{7}(20{,}4^2 + 18{,}1^2 + 15{,}2^2 + 10{,}6^2 + 8{,}8^2 + 8{,}7^2 + 8{,}0^2) =$$

$$= \frac{1304{,}3}{7} \approx 186{,}329;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{4081{,}857 - 63{,}286^2} = \sqrt{76{,}739} \approx 8{,}760;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{186{,}329 - 12{,}829^2} = \sqrt{21{,}746} \approx 4{,}663.$$

а) Оценим тесноту линейной связи по коэффициенту линейной корреляции ***r***:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{775{,}029 - 63{,}286 \cdot 12{,}829}{8{,}760 \cdot 4{,}663} \approx -0{,}9025 \approx -0{,}9.$$

Так как ***r*** < 0, то связь обратная, то есть с ростом значений признака *X* значения признака *Y* убывают.

Так как $|\boldsymbol{r}| = |-0{,}9| = 0{,}9$, то по шкале Чаддока, приведенной выше, определяем, что линейная связь очень высокая.

б) Найдем уравнение линейной регрессии. Его параметры:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^{\ 2}} = \frac{775{,}029 - 63{,}286 \cdot 12{,}829}{76{,}739} \approx -0{,}48;$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} = 12{,}829 - (-0{,}48) \cdot 63{,}286 \approx 43{,}193.$$

В результате получим, что среднее значение издержек $\bar{y}_x$ связано с величиной прибыли x уравнением:

$$\bar{y}_x = -0{,}48x + 43{,}193.$$

в) Изобразим графически данные значения (x_i; y_i) в виде точек на плоскости xOy (Рис. 3).

Прямую регрессии $y = –0{,}48x + 43{,}193$ строим по двум точкам: $x = 0$; $y = – 0{,}48 \cdot 0 + 43{,}193 \approx 43$.

$x = 80$; $y = – 0{,}48 \cdot 80 + 43{,}193 = 43{,}193 – 38{,}4 \approx 4{,}8$.

Получены точки (0; 43) и (80; 4,8).

На графике прямая регрессии убывает и проходит через точку $A(\overline{x};\overline{y})$, то есть (63,3; 12,8). Прямая регрессии наилучшим образом приближена ко всем данным точкам, которые расположены вблизи прямой по обе стороны от нее.

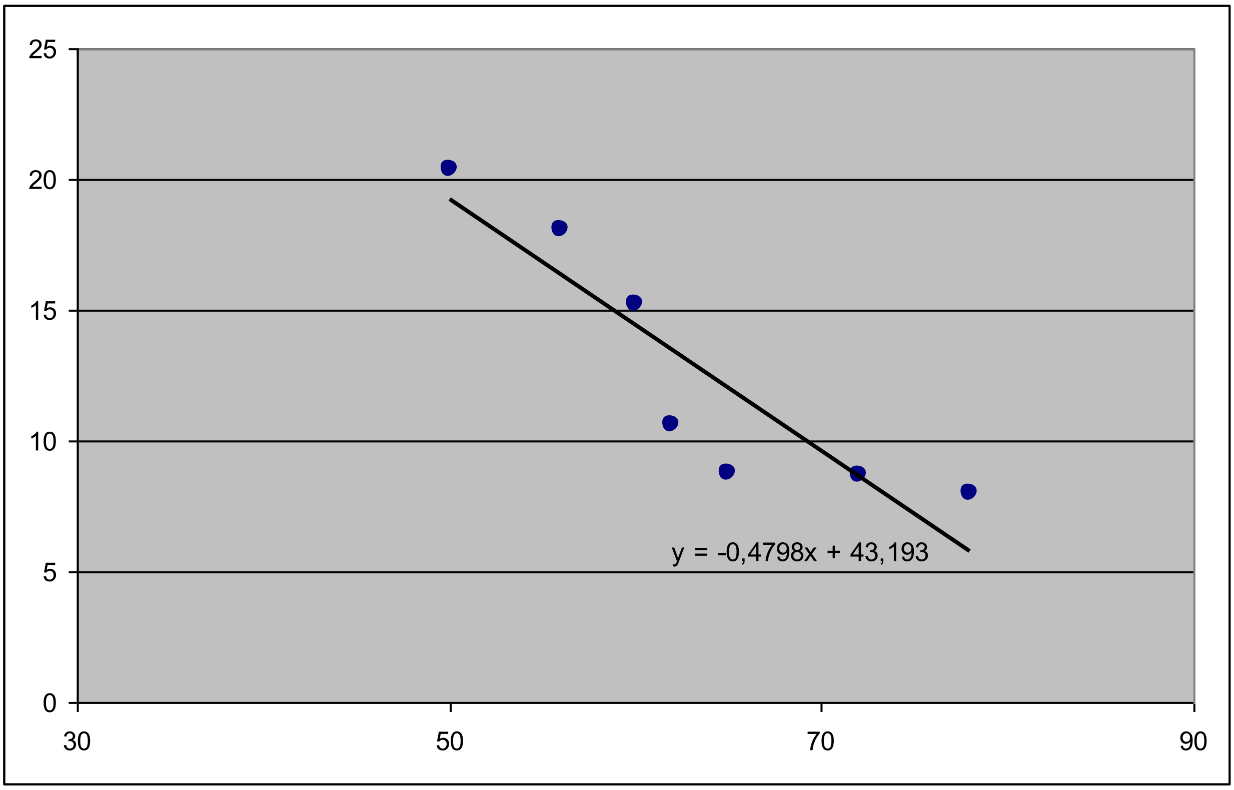

Рис. 3

г) Используя найденную зависимость, спрогнозируем величину месячных издержек, если месячная прибыль составит 82 тыс. руб.: $y = – 0{,}48 \cdot 82 + 43{,}193 \approx 3{,}8$, то есть 3,8% к объёму продаж.

Ответ. Корреляционная зависимость между признаками X и Y очень высокая, ее можно описать линейным уравнением регрессии:

$$\boldsymbol{y} = –0{,}48\boldsymbol{x} + 43{,}193.$$

Прогнозируемые издержки составят 3,8% к объёму продаж.

6. ЗАДАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В этом разделе приведены основные вопросы и типовые задачи по всем темам, изучение которых предусмотрено учебной программой по дисциплине «Математика» на втором курсе. Они предлагаются студентам для использования при подготовке к экзамену по математике.

Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1. Матрицы и определители

1. Матрицы, их виды, действия над матрицами.
2. Определители. Свойства определителей.
3. Понятие обратной матрицы
4. Даны матрицы A, B и C. Найти матрицы $A+B$, $A–B$, $5C$, $2A–3B$ и матрицу произведение $A\cdot C$, если

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить определители:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix},\quad б)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений

1. Понятие СЛАУ и её решения.
2. Виды СЛАУ и способы их решения.
3. Решить систему уравнений по правилу Крамера и матричным методом:

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}\qquad б)\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Найти общее решение системы методом Гаусса исключения переменных:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 + -18x_4 = -1 \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

Тема 3. Элементы линейного программирования

(только для специальности 260501.65)

1. Постановка задачи линейного программирования (ЛП).
2. Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП.
3. Постановка транспортной задачи ЛП.

4. Для изготовления компота двух видов используются яблоки, вишни и сливы. Количество фруктов в килограммах для изготовления одной банки компота и цена одной банки компота каждого вида даны в таблице:

Фрукты	Вид компота		Запасы фруктов, кг
	Первый	Второй	
Яблоки	1,6	0,8	8000
Вишни	0,4	0	1200
Сливы	0	1,2	9600
Цена 1 банки, руб.	50	40	

Составить план производства, дающий максимальный доход от реализации продукции.

5. Решить графически задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 2x_2 \to max$$

6. На трех станциях A_1, A_2, A_3 сосредоточен однородный груз соответственно в объемах 9; 16 и 5 тонн, который необходимо доставить четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно в

объемах 11; 7; 8 и 4 тонны. Затраты на перевозку 1 тонны груза от каждой станции до каждого потребителя заданы матрицей тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется спланировать перевозки так, чтобы обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов.

Раздел 2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 4. Комбинаторика (для специальностей 080111.65 и 080401.65)

1. Правила сложения и умножения при составлении комбинаций из элементов нескольких множеств.
2. Перестановки, размещения и сочетания из элементов одного множества, их количество без учёта повторения элементов.
3. Порядок обслуживания шести участников конкурса определяется жеребьёвкой. Сколько различных вариантов жеребьёвки при этом возможно?
4. Код содержит четыре цифры. Сколько имеется различных способов кодирования?
5. Студенческий совет состоит из 15 человек, среди которых 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наугад выбирают 5 человек на предстоящую конференцию. Сколько имеется всего способов выбора. Сколько из этих способов таких, что: *а*) будут выбраны только одни второкурсники; *б*) не будет выбрано ни одного второкурсника; *в*) будут выбраны только третьекурсники; *г*) все первокурсники будут выбраны на конференцию; *д*) будет выбран следующий состав: 1 первокурсник, 2 второкурсника и 2 третьекурсника.

Тема 5. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

1. Испытание, события, виды событий.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.
4. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.

5. Вероятность появления хотя бы одного события из нескольких возможных.

6. Полная группа событий.

7. Формула полной вероятности и формула Байеса.

8. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0,95; для изделий второго и третьего видов эти вероятности равны соответственно 0,85 и 0,65. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен: *а*) всем изделиям; *б*) только одному изделию; *в*) хотя бы одному изделию.

9. В партии товара, состоящей из 50 мужских костюмов, находится 30 изделий местного производства. Товаровед наудачу отбирает три изделия. Какова вероятность, что все три изделия окажутся: *а*) местного производства; *б*) не местного производства?

10. В магазин поступает натуральный сок в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причем местный изготовитель поставляет 60% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции равна 0,6%, а для иногородней продукции она составляет 2%. Найти вероятность того, что взятая наугад бутылка окажется разбитой. Взятая бутылка оказалась разбитой, какова вероятность, что она от местного изготовителя?

11. Для подготовки к экзамену студенту выдано 20 вопросов. Студент выучил половину из них. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого он должен ответить хотя бы на два из трёх вопросов, предложенных ему случайным образом?

Тема 6. Повторные независимые испытания

1. Для чего используется формула Бернулли?
2. Наивероятнейшее число появлений события в $\boldsymbol{n}$ испытаниях.
3. Оптовая база снабжает товаром $\boldsymbol{n}$ магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар, равна $\boldsymbol{p}$ для каждого магазина. Найти вероятность того, что в течение дня поступят: *а*) ровно $\boldsymbol{k}$ заявок; *б*) не менее $\boldsymbol{k_1}$, но не более $\boldsymbol{k_2}$ заявок. *в*) Каково наивероятнейшее число поступающих в течение дня заявок и чему равна соответствующая ему вероятность?

    1) $p = 0{,}6$; $n = 7$; $k = 4$; $k_1 = 0$; $k_2 = 2$;
    2) $p = 0{,}7$; $n = 20$; $k = 7$; $k_1 = 8$; $k_2 = 14$.

Раздел 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема 7. Дискретная случайная величина

1. Случайные величины, их виды и способы задания.
2. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, их смысл.
3. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины, его основные характеристики.
4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения, заданному таблицей:

X	12	14	18	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

5. Производство даёт в среднем 40% изделий отличного качества. Наугад взяты пять изделий. Составить закон распределения случайной величины X – количества изделий отличного качества среди пяти взятых изделий, и найти его основные характеристики.

Тема 8. Непрерывная случайная величина

1. Способы задания непрерывной случайной величины.
2. Интегральная и дифференциальная функции распределения непрерывной случайной величины, их вероятностный смысл, свойства и взаимная связь.
3. Основные характеристики непрерывно распределённой случайной величины, их вычисление.
4. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины, его особенности.
5. Понятие о законе больших чисел.
6. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеют массу, меньшую 500 г. Вес коробок распределён по нормальному закону. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) отличается от средней массы не более чем на 30 г?
7. Интервал движения автобусов составляет 15 минут. Какова вероятность того, что пассажир на остановке автобуса будет ждать его не более 5 минут?

Тема 9. Системы массового обслуживания (СМО)
(для специальностей 080111.65 и 080401.65)

1. Простейший поток требований, его свойства и основные характеристики.
2. Канал обслуживания, его характеристики.
3. Виды СМО, основные показатели их работы.
4. Фирма получает заявки на переговоры по телефону с интенсивностью 90 заявок в час. Средняя продолжительность телефонного разговора составляет 2 минуты. Рассчитайте основные показатели работы этой СМО, при условии, что число каналов системы $\boldsymbol{n}$ = 1; 2; 3; 4; 5 и 6. Сравните полученные результаты и выберите оптимальное решение о количестве телефонных номеров.
5. В магазине самообслуживания установлены три кассовых аппарата. Интенсивность входного потока покупателей в будние дни в среднем составляет 1,3 человека в минуту до обеда и 1,8 человек в минуту после обеда, а в субботу и воскресенье в среднем 2,2 человек в минуту. Среднее время обслуживания одного покупателя каждым контролёром-кассиром составляет 1,5 минуты. Произвести анализ работы СМО магазина.
6. На складе имеется одно место для разгрузки машин. Интенсивность потока машин составляет в среднем 1 машина в час. Среднее время разгрузки машины 1,5 часа. Имеется три места для стоянки ожидающих разгрузки машин. Если все места заняты, то машина уезжает с товаром к конкурентам. Найти долю потерянных требований, относительную и абсолютную пропускную способность этой системы, среднее число машин, ожидающих разгрузки и среднее время ожидания разгрузки. Сделать выводы об эффективности работы СМО.

Раздел 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тема 10. Обработка экспериментальных данных

1. Сущность выборочного метода.
2. Статистическое распределение выборки.
3. Основные характеристики выборочного распределения.
4. Точечные и интервальные оценки генеральных характеристик.
5. По данным выборки найти относительные частоты и построить гистограмму относительных частот:

X	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	6	8	2	1

Вычислить среднюю выборочную, дисперсию и среднее выборочное квадратическое отклонение. Дать точечные оценки основных генеральных характеристик. С надёжностью 95% найти доверительный интервал для генеральной средней.

Вариационные ряды (только для спец. 080401.65)

1. Понятие вариационного ряда.
2. Средние величины: мода, медиана и среднее арифметическое значение вариационного ряда.
3. Показатели вариации: размах варьирования, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.
3. Для вариационного ряда: 1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 5; 7 указать моду, медиану и размах вариации. Вычислить среднее значение и дисперсию.
4. Найти среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для вариационного ряда:

X	5	10	12	15	20
n_i	2	1	5	1	1

Указать также моду, медиану и размах варьирования.

Тема 11. Проверка статистических гипотез

1. Определение статистической гипотезы. Основная и конкурирующая гипотезы.
2. Понятие о критериях согласия.
3. Из большой партии изделий по схеме случайной бесповторной выборки было проверено 20 изделий с целью исследования случайной величины X – процента влажности древесины, из которой изготовлены эти изделия. Получены следующие результаты:

X	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	6	8	2	1

По данным этой выборки, на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном законе распределения значений признака в генеральной совокупности, используя критерий согласия Пирсона.

Дисперсионный анализ (только для спец. 080401.65)

1. Сущность дисперсионного анализа.
2. Однофакторная дисперсионная модель.
3. Межгрупповая, внутригрупповая и общая дисперсии.
4. Для исследования влияния трёх различных видов рекламы некоторого товара на прибыль фирмы, производили наблюдения за месячной прибылью фирмы в течение полугода. Результаты наблюдений о величине месячной прибыли в тыс. рублей представлены таблицей:

Номер месяца	Вид рекламы		
	A_1	A_2	A_3
1	10	16	14
2	11	16	17
3	13	24	29
4	17	23	28
5	19	29	35
6	17	28	39

Методом дисперсионного анализа на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о существенном влиянии рекламы на уровень прибыли фирмы.

Тема 12. Теория корреляции

1. Понятие корреляционной зависимости между случайными величинами.
2. Основные задачи теории корреляции.
3. Оценка силы (тесноты) линейной корреляционной связи по коэффициенту линейной корреляции.
4. Имеются следующие данные об уровне механизации работ X % и производительности труда Y (тонн/час) для нескольких однотипных предприятий:

X	30	32	36	40	41	47	54	55	56	60
Y	24	20	28	30	31	33	37	40	34	38

Оценить тесноту и направление связи между признаками X и Y с помощью коэффициента линейной корреляции и найти уравнение линейной зависимости производительности труда Y от уровня механизации работ X. Результаты пояснить графически.

Регрессионный анализ (только для спец. 080401.65)

1. Парная регрессионная модель.
2. Линейная, криволинейная и множественная регрессии.
3. Сущность метода наименьших квадратов для нахождения параметров уравнения регрессии.
4. Для нескольких приблизительно одинаковых по площади гастрономических магазинов имеются следующие данные об уровне их издержек X %, годовому объёму товарооборота Y (млн. руб.) и годовой прибыли Z (тыс. руб.):

X	5,2	7,5	8,4	10,1	12,0
Y	1,6	2,5	5,0	5,8	7,2
Z	1500	2040	4850	6360	7820

Найти уравнение линейной регрессионной модели для зависимости прибыли Z от издержек обращения X и объёма товарооборота Y. Найти выборочные коэффициенты парной и частной корреляции и проанализировать степень тесноты линейной связи между всеми парами переменных. Используя найденную регрессионную модель, рассчитать средний уровень годовой прибыли, если издержки обращения составят 11% при объёме годового товарооборота 10 млн. руб.

Временные ряды (только для спец. 080401.65)

1. Стационарные временные ряды и их характеристики.
2. Методы сглаживания временных рядов: метод наименьших квадратов, метод скользящих средних.
3. Применение временных рядов для прогнозирования.
4. Имеются данные, отражающие спрос Y (тыс. руб.) на некоторый товар за восьмилетний период:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_t	213	171	291	309	317	362	351	361

Найти среднее значение спроса, его среднее квадратическое отклонение и коэффициенты автокорреляции для лагов величиной 1 и 2. Найти и построить уравнение линейного тренда и проверить его значимость по F- критерию на уровне 5%. Произвести сглаживание данного временного ряда методом скользящих средних с интервалом сглаживания 3 года. Дать точечную и, с надёжностью 0,95, интервальную оценки прогноза среднего и индивидуального значений спроса на девятый год.

7. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

7.1 Основная литература

1. Кузнецов Б.Т. Математика: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.

7.2 Дополнительная литература

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.– М.: Высшая школа, 2001.
5. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 2-е изд. – М.: Дело, 2001.
6. Малыхин В.И. Математика в экономике: учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2002.
7. Кундышева Е.С. Математика: учеб. пособие для экономистов. – М.: Наука, 2005.
8. Карасев А.И. Курс высшей математики для экономических вузов / А.И. Карасев, З.М. Аксютина, Т.И. Савельева. – М.: Высшая школа, 1990.
9. Теория вероятностей и математическая статистика. Справочный материал и методические указания для самостоятельной работы студентов, – Новосибирск: СибУПК, 1997.
10. Теория вероятностей. Задания для практических занятий. – Новосибирск: СибУПК, 2006.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0631	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	2519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\varphi(x \geq 4) = 0 \qquad \varphi(-x) = \varphi(x)$$

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.37	0.1443	0.74	0.2703	1.11	0.3665
0.01	0.0040	0.38	0.1480	0.75	0.2734	1.12	0.3686
0.02	0.0080	0.39	0.1517	0.76	0.2764	1.13	0.3708
0.03	0.0120	0.40	0.1554	0.77	0.2794	1.14	0.3729
0.04	0.0160	0.41	0.1591	0.78	0.2823	1.15	0.3749
0.05	0.0199	0.42	0.1628	0.79	0.2852	1.16	0.3770
0.06	0.0239	0.43	0.1664	0.80	0.2881	1.17	0.3790
0.07	0.0279	0.44	0.1700	0.81	0.2910	1.18	0.3810
0.08	0.0319	0.45	0.1736	0.82	0.2939	1.19	0.3830
0.09	0.0359	0.46	0.1772	0.83	0.2967	1.20	0.3849
0.10	0.0398	0.47	0.1808	0.84	0.2995	1.21	0.3869
0.11	0.0439	0.48	0.1844	0.85	0.3023	1.22	0.3883
0.12	0.0478	0.49	0.1879	0.86	0.3051	1.23	0.3907
0.13	0.0517	0.50	0.1915	0.87	0.3078	1.24	0.3925
0.14	0.0557	0.51	0.1950	0.88	0.3106	1.25	0.3944
0.15	0.0596	0.52	0.1985	0.89	0.3133	1.26	0.3962
0.16	0.0638	0.53	0.2019	0.90	0.3159	1.27	0.3980
0.17	0.0675	0.54	0.2054	0.91	0.3186	1.28	0.3997
0.18	0.0714	0.55	0.2088	0.92	0.3212	1.29	0.4015
0.19	0.0753	0.56	0.2123	0.93	0.3238	1.30	0.4032
0.20	0.0793	0.57	0.2157	0.94	0.3264	1.31	0.4049
0.21	0.0832	0.58	0.2190	0.95	0.3289	1.32	0.4066
0.22	0.0871	0.59	0.2224	0.96	0.3315	1.33	0.4082
0.23	0.0910	0.60	0.2257	0.97	0.3340	1.34	0.4099
0.24	0.0948	0.61	0.2291	0.98	0.3365	1.35	0.4115
0.25	0.0987	0.62	0.2324	0.99	0.3389	1.36	0.4131
0.26	0.1026	0.63	0.2357	1.00	0.3413	1.37	0.4147
0.27	0.1064	0.64	0.2389	1.01	0.3438	1.38	0.4162
0.28	0.1103	0.65	0.2422	1.02	0.3461	1.39	0.4177
0.29	0.1141	0.66	0.2454	1.03	0.3485	1.40	0.4192
0.30	0.1179	0.67	0.2486	1.04	0.3508	1.41	0.4207
0.31	0.1217	0.68	0.2517	1.05	0.3581	1.42	0.4222
0.32	0.1255	0.69	0.2549	1.06	0.3554	1.43	0.4236
0.33	0.1293	0.70	0.2580	1.07	0.3577	1.44	0.4251
0.34	0.1331	0.71	0.2611	1.08	0.3599	1.45	0.4265
0.35	0.1368	0.72	0.2642	1.09	0.3621	1.46	0.4279
0.36	0.1406	0.73	0.2673	1.10	0.3643	1.47	0.4292

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.48	0.4306	1.76	0.4608	2.08	0.4812	2.64	0.4959
1.49	0.4319	1.77	0.4616	2.10	0.4821	2.66	0.4961
1.50	0.4332	1.78	0.4625	2.12	0.4830	2.68	0.4963
1.51	0.4345	1.79	0.4633	2.14	0.4838	2.70	0.4965
1.52	0.4357	1.80	0.4641	2.16	0.4846	2.72	0.4967
1.53	0.4370	1.81	0.4649	2.18	0.4854	2.74	0.4969
1.54	0.4382	1.82	0.4656	2.20	0.4861	2.76	0.4971
1.55	0.4394	1.83	0.4664	2.22	0.4868	2.78	0.4973
1.56	0.4406	1.84	0.4671	2.24	0.4875	2.80	0.4974
1.57	0.4418	1.85	0.4678	2.26	0.4881	2.82	0.4976
1.58	0.4429	1.86	0.4686	2.28	0.4887	2.84	0.4977
1.59	0.4441	1.87	0.4693	2.30	0.4893	2.86	0.4979
1.60	0.4452	1.88	0.4699	2.32	0.4898	2.88	0.4980
1.61	0.4463	1.89	0.4706	2.34	0.4904	2.90	0.4981
1.62	0.4474	1.90	0.4713	2.36	0.4909	2.92	0.4982
1.63	0.4484	1.91	0.4719	2.38	0.4913	2.94	0.4984
1.64	0.4495	1.92	0.4726	2.40	0.4918	2.96	0.4985
1.65	0.4505	1.93	0.4732	2.42	0.4922	2.98	0.4986
1.66	0.4515	1.94	0.4338	2.44	0.4927	3.00	0.49865
1.67	0.4525	1.95	0.4744	2.46	0.4931	3.20	0.49931
1.68	0.4535	1.96	0.4750	2.48	0.4934	3.40	0.49966
1.69	0.4545	1.97	0.4756	2.50	0.4938	3.60	0.49984
1.70	0.4554	1.98	0.4761	2.52	0.4941	3.80	0.49993
1.71	0.4564	1.99	0.4767	2.54	0.4945	4.00	0.49997
1.72	0.4573	2.00	0.4772	2.56	0.4948	4.50	0.49999
1.73	0.4582	2.02	0.4783	2.58	0.4951	5.00	0.50000
1.74	0.4591	2.04	0.4793	2.60	0.4953		
1.75	0.4599	2.06	0.0480	2.62	0.4956		

$$\Phi(x > 5) = 0{,}5$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$